

**REGULARISIERUNG DREIDIMENSIONALER
RADON-PROBLEME DURCH FALTUNG**

DIETWALD SCHUSTER

Disbui. München

1987



Regularisierung dreidimensionaler Radon-Probleme durch Faltung

Dissertation

**zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München**

**vorgelegt von
Dietwald Schuster
aus Garching b. München**

eingereicht am 29.7.1987

1. **Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin**
2. **Berichterstatter: Privat-Dozent Dr. E. Schäfer**

Tag der mündlichen Prüfung: 7.12.1987

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Bezeichnungen	6
 Kapitel I : Die Radon-Transformation und verwandte Integraloperatoren	
1. Definition der Radon-Operatoren	8
2. Die dualen Transformationen	11
3. Der Faltungsalgorithmus und elementare Inversionsformeln	13
 Kapitel II : Der Faltungsalgorithmus als Regularisierungsmethode	
4. Sobolevräume und Radon-Gleichungen als schlecht gestellte Probleme	22
5. Regularisierung durch Faltung	29
6. Zur Wahl des Regularisierungsparameters	33
 Kapitel III : Die Bestimmung von Faltungskernen für die gefilterte Rückprojektion	
7. Die dualen Gleichungen im rotationssymmetrischen Fall	38
8. Eigenschaften und Beispiele von rotationssymmetrischen Faltungskernen	47
9. Kerne für die Fächerstrahlgeometrie	63
 Kapitel IV : Faltungskerne und Inversionsformeln	
10. Die Inversionsformeln	67
11. Fourier-Transformation von Faltungskernen	73
12. Eine Rekonstruktionsmethode von K. T. Smith	78
 Kapitel V : Numerische Ergebnisse	
13. Gefilterte Rückprojektion im dreidimensionalen Fall	82
14. Beispiele für dreidimensionale Rekonstruktionen	89
 Literaturverzeichnis	 120



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Viele praktische Fragestellungen lassen sich im Rahmen eines mathematischen Modells als Operatorgleichungen formulieren, und zwar meist als Differential- oder Integralgleichungen. Einen besonderen Typ von Aufgaben stellen darunter die sogenannten inkorrekt gestellten Probleme dar, die vor allem in jüngerer Zeit besondere Beachtung gefunden haben. Eine Gleichung $Af = g$ mit einem Operator $A: H_1 \rightarrow H_2$ (H_1 und H_2 Hilberträume) heißt inkorrekt oder schlecht gestellt im Sinne von Hadamard, falls der Operator nicht bijektiv oder A^{-1} nicht stetig ist.

Die numerische Berechnung von Näherungslösungen bei inkorrekt gestellten Gleichungen führt auf Schwierigkeiten, die besondere Vorgehensweisen und Methoden erfordern. Wichtige Gleichungen dieser Art ergeben sich aus der Radon-Transformation und den verallgemeinerten Radon-Operatoren. Diese Integraloperatoren haben in der diagnostischen Medizin bei dem als Computer-Tomographie bekannten Röntgenverfahren Anwendung gefunden; weitere Anwendungen gibt es auch in der Astrophysik, beim zerstörungsfreien Prüfen und bei der Kernspin-Tomographie.

Die Wirkung der Radon-Operatoren läßt sich folgendermaßen beschreiben. Betrachtet man zu einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Werte der Flächenintegrale über alle Hyperebenen der Dimension $n-1$, so entspricht dies der Radon-Transformation mittels des Operators $\mathbf{R}$, die von J. Radon 1917 im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen untersucht wurde. Falls f über Geraden integriert wird, erhält man einen verwandten Integraloperator $\mathbf{P}$, die Strahlentransformation; wir nennen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$ Radon-Operatoren. Im Fall $n = 2$ sind beide Operatoren identisch und bilden die mathematische Grundlage der Computer-Tomographie. Dieses Röntgenverfahren beruht auf dem folgenden Modell. Beim Durchdringen des menschlichen Körpers werden Röntgenstrahlen infolge der verschiedenen Gewebeschaffenheit unterschiedlich abgeschwächt. Die Abschwächung kann man auf einzelnen Strahlen messen und daraus direkt auf die Linienintegrale der Dichteverteilung (Dichte als Funktion des Ortes) des Gewebes entlang dieser Strahlen schließen. Es stellt sich die Aufgabe, eine Dichtefunktion aus ihren Linienintegralen zu rekonstruieren. In der üblichen Tomographie wird jeweils in einer Schnittebene durchstrahlt; damit ist die Dichte in einer Ebene,

also zweidimensional, zu bestimmen. Dieses Problem wurde vielfach untersucht, und es gibt eine Reihe numerischer Verfahren, um Schnittbilder zu rekonstruieren.

Das mathematische Problem besteht darin, die Radon-Gleichung $Rf = g$ bzw. $Pf = g$ zu lösen. Radon-Gleichungen sind als Abbildungen von L^2 -Räumen inkorrekt gestellt, und zwar sind die Inversen R^{-1} und P^{-1} nicht stetig. Zur numerischen Behandlung werden deshalb Regularisierungsmethoden herangezogen. Man approximiert die unstetige Inverse durch eine Familie stetiger Operatoren. Das im zweidimensionalen Fall meist verwendete und erfolgreichste numerische Verfahren zur Berechnung einer Näherungslösung der Gleichung $Pf = g$ ist der sogenannte Faltungsalgorithmus (gefilterte Rückprojektion). Die Daten g werden mit einem Faltungskern (Filter) Φ_ε gefaltet, und anschließend wird der duale Operator P^* (das ist bei geeigneten Definitionsbereichen der adjungierte Operator) angewendet. Man bestimmt also eine Näherung an f der Form $P^*(\Phi_\varepsilon * g) = \varphi_\varepsilon * f$, wobei $P^*\Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ und $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine vorgegebene Familie von Funktionen ist, so daß $\varphi_\varepsilon * f$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen f konvergiert. Das Problem der Bestimmung von Faltungskernen Φ_ε besteht im Lösen der dualen Gleichung $P^*\Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$. Diese Aufgabe ist im Hinblick auf die numerische Durchführung der gefilterten Rückprojektion nur im Fall $n = 2$ befriedigend gelöst. Dreidimensionale Röntgen-Tomographie entspricht der Gleichung $Pf = g$, $n = 3$; die in der Literatur vorgeschlagenen numerischen Verfahren scheinen nicht ohne weiteres praktisch durchführbar zu sein.

Wir behandeln in dieser Arbeit die Aufgabe der Berechnung von Faltungskernen für die gefilterte Rückprojektion, also die duale Gleichung $P^*\Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ bzw. $R^*\Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, insbesondere im Fall $n = 3$. Der Faltungsalgorithmus wird als Regularisierungsmethode der entsprechenden schlecht gestellten Radon-Gleichung interpretiert.

Das erste Kapitel enthält die an Nievergelt [36] orientierte Herleitung des Faltungsalgorithmus in beliebiger Dimension, ohne auf die klassischen Inversionsformeln zurückzugreifen. Für den Fall des Operators P und $n = 3$ wird eine elementare Inversionsformel bewiesen, die ein Analogon zu zweidimensionalen Ergebnissen von Nievergelt [36] darstellt.

Für das Untersuchen der Radon-Operatoren haben sich Sobolev-Räume als wichtiges Hilfsmittel erwiesen. Grundlegende Aussagen, insbesondere bezüglich der Eigenschaft "schlecht gestellt", gehen auf Natterer zurück.

Obwohl die Radon-Gleichungen vielfach als inkorrekt gestellte Probleme untersucht wurden, wird der Faltungsalgorithmus in der Literatur in diesem Zusammenhang nicht betrachtet. Wir zeigen im Kapitel II, daß der Faltungsalgorithmus eine Regularisierung der entsprechenden Radon-Gleichung im Sinne der Theorie schlecht gestellter Probleme ist. Die Wahl des Regularisierungsparameters ε ist erfahrungsgemäß schwierig, man behilft sich bei der praktischen Rechnung meist mit Ausprobieren. Wir übertragen Überlegungen von Herman bzw. Natterer zur Schätzung des Parameters beim zweidimensionalen Faltungsalgorithmus auf den Fall $n=3$ und den Operator P .

Die explizite Kenntnis von Faltungskernen Φ_ε (Filter) ist für die numerische Anwendung der gefilterten Rückprojektion von zentraler Bedeutung. Das Lösen der dualen Gleichung $P^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ ist im zweidimensionalen Fall mit Hilfe von Fourier-Methoden möglich; in der Computer-Tomographie kennt man ein Vielzahl von Kernen explizit. In einem allgemeineren Rahmen wurden die dualen Gleichungen von Smith [45] und, speziell für $\mathbb{R}$, von Nievergelt [37] betrachtet. Die vorgeschlagenen Lösungsmethoden beruhen auf den bekannten Inversionsformeln und liefern Formeln für Φ_ε , die nur in Spezialfällen numerisch ausgewertet werden können. Wir entwickeln im dritten Kapitel einen anderen Zugang zum Lösen der Gleichung $P^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, der ohne Inversionsformeln für P auskommt und Ausdrücke für Φ_ε liefert, die meist ohne Schwierigkeiten explizit berechnet werden können. Dazu wird vorausgesetzt, daß φ_ε rotationssymmetrisch ist. Dies bedeutet für die praktische Anwendung keine wesentliche Einschränkung. Wir zeigen, daß im Falle der Rotationssymmetrie die dualen Gleichungen auf spezielle Volterra-sche Integralgleichungen, nämlich verallgemeinerte Abelsche Gleichungen, zurückgeführt werden können. Auf diese Weise können die Lösungen oft sogar analytisch angegeben werden. In jedem Fall kann man jedoch die erhaltenen Ausdrücke mittels Quadraturformeln numerisch stabil auswerten. Außerdem ermöglicht es dieser Zugang, viele Eigenschaften der Filter allgemein abzuleiten. Wir geben mehrere Beispiele für Kerne, die mit dieser Methode bestimmt wurden, vor allem für den Operator P und $n=3$. Insbesondere können Kerne, die Nievergelt für $\mathbb{R}$ angegeben hat, in diesem Rahmen einfach wiedergefunden werden. Schließlich wird noch gezeigt, daß diese Filter auch für die Fächerstrahlgeometrie geeignet sind.

Die im Kapitel III entwickelte Methode zur Bestimmung rotations-symmetrischer Faltungskerne wird im Kapitel IV zu den klassischen Inversionsformeln in Beziehung gesetzt. Der Zusammenhang ermöglicht es, die Fourier-Transformierten der Kerne zu bestimmen, was für die Analyse des Glättungsverhaltens der Filter von Bedeutung ist. Weiterhin wird eine von Smith [46] vorgeschlagene spezielle Rekonstruktionsmethode beschrieben, die mit dem Faltungsalgorithmus und den Inversionsformeln zusammenhängt. Für die wesentliche Eigenschaft des Verfahrens wird ein vereinfachter Beweis gegeben.

Numerische Beispiele für Rekonstruktionen im Falle des Operators $\mathbf{P}$ und $n=3$ sind in der Literatur kaum zu finden. Über eine praktische Realisierung der Inversionsformeln von Smith [44] wird nur im zweidimensionalen Fall berichtet, ebenso über ein iteratives Verfahren von Hamaker [16]. Lediglich bei Herman [18] wird ein sehr aufwendiger dreidimensionaler Versuch beschrieben.

Das fünfte Kapitel enthält numerische Ergebnisse für den dreidimensionalen Faltungsalgorithmus zum Operator $\mathbf{P}$. Wir untersuchen die Möglichkeiten zur Diskretisierung und entwickeln eine diskrete Version der gefilterten Rückprojektion mittels Ansätzen von Natterer. Anschließend werden gerechnete Testbeispiele für dreidimensionale Rekonstruktionen vorgestellt und besprochen. Die numerischen Ergebnisse wurden mit Hilfe der Faltungskerne aus Kapitel III erzielt.

Sowohl die theoretischen Untersuchungen zum Faltungsalgorithmus, als auch die numerischen Resultate dieser Arbeit beziehen sich auf den Fall vollständiger Daten, d.h. es wurden Strahlen aller Richtungen gemessen. Dies trifft bei der medizinischen Anwendung zwar nicht zu, da etwa entlang der Längsachse des Körpers nicht durchstrahlt werden kann. Was die praktische Anwendung in der Radiologie betrifft, wäre aber die Möglichkeit einer Ergänzung der unvollständigen Daten denkbar, die im zweidimensionalen Fall brauchbare Ergebnisse liefert. Außerdem können bei anderen Anwendungen, wie Elektronenmikroskopie oder zerstörungsfreies Prüfen leichter vollständige Daten ermittelt werden, so daß numerische Verfahren für den dreidimensionalen Fall von Bedeutung sind.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich herzlich für die wohlwollende Unterstützung und das stete Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

Mein Dank gilt auch Herrn Dr. E. Schäfer für anregende Gespräche, sowie den Herren U. Schmid und M. Thoma für wertvolle Hinweise und kritische Anmerkungen zur Darstellung.



Bezeichnungen

$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen (mit Null)
$\langle x, y \rangle$	Euklidisches Skalarprodukt $(= \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n)$
$ x $	Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ ($= \langle x, x \rangle^{1/2}$)
$K_n(a, r)$	offene Kugel um $a \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r \geq 0$ $(= \{ x \in \mathbb{R}^n : x - a < r \})$
$\partial K_n(a, r)$	Rand der Kugel um a mit Radius r $(= \{ x \in \mathbb{R}^n : x - a = r \})$
S^{n-1}	Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ ($= \partial K_n(0, 1)$)
$ S^{n-1} $	Oberflächeninhalt der Sphäre S^{n-1}
cc	kompakt enthalten
$\text{supp } f$	Träger der Funktion f
$f * g$	Faltung der Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy)$
$L^p(\Omega)$	reelle Funktionen f mit $ f ^p$ integrierbar über Ω
$L^p_0(\Omega)$	$= \{ g \in L^p(\mathbb{R}^n) : \text{supp } g \subset\subset \Omega \}$
(f, g)	$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx$ (L^2 -Skalarprodukt)
$C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$	beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger
$\theta^\perp$	orthogonales Komplement von $\theta \in \mathbb{R}^n$ $(= \{ y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \theta \rangle = 0 \})$
$E_{\theta^\perp} x$	orthogonale Projektion von $x \in \mathbb{R}^n$ auf $\theta^\perp$ mit $\theta \in S^{n-1}$
f.ü.	fast überall
R, P, D	Radon-Operatoren (siehe I. (1.1))
$\hat{f}, F$	Fourier-Transformation (I. (1.2))
R^*, P^*	duale Transformationen (I. (2.1))

L^p_{loc}

χ_K

$W^\alpha_2, \tilde{W}^\alpha_2, H^\alpha, H^\alpha_0$

$\mathcal{S}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$[\alpha]$

$\omega(s, f)$

R_α

Λ

Δ

lokal p -integrierbare Funktionen

charakteristische Funktion zu $K \subset \mathbb{R}^n$

Sobolevräume (siehe II.4)

Schwartzraum (II.4)

größte ganze Zahl kleiner gleich $\alpha \in \mathbb{R}$

Stetigkeitsmodul (II.(5.4))

Riesz-Kern (IV.10)

Calderon-Operator (IV.10)

Laplace-Operator (IV.12)

Kapitel I : Die Radon-Transformation und verwandte Integraloperatoren

1. Definition der Radon-Operatoren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion mit $\text{supp } f \subset \Omega$.

(1.1) **Definition.** (Radon- und Strahlentransformation)

Sei $f \in L^2_0(\Omega)$, wobei $L^2_0(\Omega) := \{ g \in L^2(\mathbb{R}^n) : \text{supp } g \subset \subset \Omega \}$.

a) Die *Radon-Transformation* ordnet der Funktion f die folgendermaßen definierte Funktion Rf zu:

$$Rf(\theta, s) := \int_{\langle x, \theta \rangle = s} f(x) dx = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy,$$

wobei $(\theta, s) \in Z := S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Das Integral ist als Flächenintegral über die Hyperebene $\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = s \}$ zu verstehen.

b) Durch

$$Pf(\theta, x) := \int_{\mathbb{R}} f(x+t\theta) dt,$$

$(\theta, x) \in T$ mit $T := \{ (\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp \}$ wird die

Parallel-Strahlen-Transformation (x-ray transform) definiert. Für festes θ liefert Pf die Linienintegrale von f über die zu θ parallelen Geraden.

c) Die *divergente Strahlentransformation* (Fächerstrahltransformation) ist definiert durch

$$Df(a, \theta) := \int_0^\infty f(a+t\theta) dt,$$

mit $a \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in S^{n-1}$.

Die Funktion f wird also über die Halbgerade $\{ a+t\theta : t \geq 0 \}$ integriert. a wird auch Quelle und θ Richtung der Fächerstrahlen genannt.

Bemerkungen: Für $n = 2$ sind Rf und Pf bis auf die Bezeichnung der Argumente gleich. Man verwendet auch die folgenden Bezeichnungen:

$$R_{\theta} f(s) := Rf(\theta, s), \quad P_{\theta} f(x) := Pf(\theta, x), \quad D_a f(\theta) := Df(a, \theta).$$

Die Operatoren R , P , D sind für $n \geq 3$ Verallgemeinerungen der Radon-Transformation für Funktionen zweier Veränderlicher; wir nennen sie deshalb auch *Radon-Operatoren*. Die entsprechenden Integralgleichungen $Rf=g$ bzw. $Pf=g$ werden als *Radon-Gleichungen* bezeichnet.

Folgende einfache Eigenschaften der Operatoren R , P , D , ergeben sich direkt aus den Definitionen:

$$Rf(-\theta, -s) = Rf(\theta, s),$$

$$Pf(\theta, E_{\theta} a) = Df(a, \theta) + Df(a, -\theta),$$

wobei E_{θ} die orthogonale Projektion im $\mathbb{R}^n$ auf $\theta^{\perp}$ ist.

(1.2) **Definition.** (Fourier-Transformation)

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die *Fourier-Transformation* definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = Pf(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

und auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt (vgl. Stein [52]).

Bemerkung: Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt die folgende Beziehung (inverse Fourier-Transformation):

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi,$$

falls $\hat{f}$ integrierbar ist.

(1.3) **Definition.**

a) Sei $L^2(Z)$ der Raum der meßbaren Funktionen g auf Z mit $\|g\|_Z < \infty$,

$$\|g\|_Z^2 := \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g^2(\theta, s) ds d\theta.$$

Seien $g, h \in L^2(Z)$.

$$(g, h)_Z := \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g(\theta, s) h(\theta, s) \, ds d\theta$$

definiert ein Skalarprodukt für Funktionen auf Z , $L^2(Z)$ ist damit ein Hilbert-
raum

Die Faltung von Funktionen auf Z bedeutet Faltung bezüglich der zweiten
Variablen:

$$g * h(\theta, s) := \int_{\mathbb{R}} g(\theta, s-t) h(\theta, t) \, dt \quad ,$$

ebenso die Fourier-Transformation:

$$\hat{h}(\theta, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(\theta, s) e^{-i\sigma s} \, ds$$

b) Sei $L^2(T)$ der Raum der meßbaren Funktionen auf T mit $\|g\|_T < \infty$.

$$\|g\|_T^2 := \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g^2(\theta, x) \, dx d\theta$$

Seien $g, h \in L^2(T)$. Durch

$$(g, h)_T := \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, x) h(\theta, x) \, dx d\theta$$

wird ein Skalarprodukt für Funktionen auf T definiert, $L^2(T)$ ist damit ein
Hilbertraum. Faltung und Fourier-Transformation werden bezüglich des
zweiten Argumentes definiert:

$$g * h(\theta, x) := \int_{\theta^\perp} g(\theta, x-y) h(\theta, y) \, dy \quad , \quad x \in \theta^\perp$$

$$\hat{h}(\theta, \xi) := (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\theta^\perp} h(\theta, x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \, dx \quad , \quad \xi \in \theta^\perp .$$

Zu den Definitionen (1.3) vergleiche man auch Natterer [34], II.1 .

2. Die dualen Transformationen

Für die Behandlung der Operatoren $\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$ sind die sogenannten dualen Transformationen $\mathbf{R}^*$ und $\mathbf{P}^*$ von Bedeutung. Bei geeigneten Definitionsbereichen sind diese genau die adjungierten Operatoren.

(2.1) Definition.

a) Sei $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathbf{R}^* g(x) := \int_{S^{n-1}} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Sei $g : T \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathbf{P}^* g(x) := \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die dualen Transformationen heißen auch *Rückprojektion*. Sie werden zunächst für Funktionen betrachtet, für die die Integralausdrücke existieren. Genauere Auskunft über die Definitionsbereiche der Operatoren $\mathbf{R}^*$ und $\mathbf{P}^*$ geben die Sätze (2.2) und (2.3).

Bemerkungen:

Die obigen Integrale sind Oberflächenintegrale über die Sphäre.

$\mathbf{R}^* g(x)$ ergibt sich durch Integrieren von g über die Menge aller Hyperebenen, die durch den Punkt x gehen, und $\mathbf{P}^* g(x)$ durch Integrieren von g über die Menge aller Geraden, die durch x gehen.

Wir bezeichnen mit L^1_{loc} beziehungsweise L^2_{loc} die Räume der lokal integrierbaren bzw. lokal quadratintegrierbaren Funktionen.

Über die Definitionsbereiche der dualen Operatoren läßt sich die folgende Aussage machen.

(2.2) **Satz.**

Sei $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Z})$ beziehungsweise $g \in L^1_{\text{loc}}(T)$.

Dann ist $\mathbf{R}^* g$ beziehungsweise $\mathbf{P}^* g$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und lokal integrierbar.

Beweis: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, $f = \chi_K$ die charakteristische Funktion zu K .

i) Sei $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Z})$ und zuerst $g \geq 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \infty > \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(\omega, \langle x, \omega \rangle) dx d\omega &= \int_{S^{n-1}} \int_K g(\omega, \langle x, \omega \rangle) dx d\omega = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{S^{n-1}} g(\omega, \langle x, \omega \rangle) d\omega dx = (f, \mathbf{R}^* g) \quad (\text{Fubini}). \end{aligned}$$

Anwendung obiger Rechnung auf Positiv- und Negativteil von g liefert die Behauptung, d.h. $\mathbf{R}^* g$ existiert fast überall und ist lokal integrierbar.

ii) Falls $g \in L^1_{\text{loc}}(T)$, dann ist das folgende Integral endlich:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(\omega, E_\omega x) dx d\omega = (f, \mathbf{P}^* g)$$

und die Behauptung folgt wie in i). $\square$

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen den dualen und den adjungierten Operatoren von $\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$.

(2.3) **Satz.**

i) Die Operatoren

$$\mathbf{R} : L^2_0(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{Z})$$

$$\mathbf{P} : L^2_0(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(T)$$

sind linear und stetig.

ii) Sei $f \in L^2_0(\Omega)$, $g \in L^2(Z)$. Es gilt:

g liegt im Definitionsbereich des adjungierten Operators R^* genau dann, wenn $R^*g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $R^* = R^{**}$ und

$$(Rf, g)_Z = (f, R^*g).$$

iii) Sei $f \in L^2_0(\Omega)$, $g \in L^2(T)$. Dann gilt:

g liegt im Definitionsbereich von P^* genau dann, wenn $P^*g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Außerdem ist dann $P^* = P^{**}$ und

$$(Pf, g)_T = (f, P^*g).$$

Beweis: Smith [48], Abschnitt 9, 12. $\square$

3. Der Faltungsalgorithmus und elementare Inversionsformeln

Der sogenannte Faltungsalgorithmus (oder auch gefilterte Rückprojektion) ist eine Methode, die Operatorgleichung $Rf = g$ bzw. $Pf = g$ für $n=2$ näherungsweise zu lösen. Meist wird dieses Verfahren aus den klassischen Inversionsformeln hergeleitet (Herman [18], Smith [44]). Mit Hilfe eines Spezialfalles des Faltungsalgorithmus hat Nievergelt in [36] eine elementare Inversionsformel für das zweidimensionale Radon-Problem bewiesen. Auf diese Weise ist ein Zugang zur Inversion des Operators R möglich, der die mathematischen Hilfsmittel (Fourier-Methoden, Hilbert-Transformation), die üblicherweise zur Behandlung der Radon-Transformation benötigt werden, vermeidet und mit einfachen Mitteln der reellen Analysis auskommt.

Es werden nun zuerst die Grundlagen des Faltungsalgorithmus hergeleitet, ohne auf die klassischen Inversionsformeln der betrachteten Operatoren zurückzugreifen. Dann wird für den Fall des Operators P und $n=3$ eine elementare Inversionsformel bewiesen, die ein Analogon zu den zweidimensionalen Ergebnissen von Nievergelt darstellt.

Das folgende Lemma beinhaltet Aussagen über die Wirkung der dualen Operatoren auf Faltungen. Wir schreiben $\mathbf{R}^* g * f$ für $(\mathbf{R}^* g) * f$, entsprechend $\mathbf{P}^* g * f$ für $(\mathbf{P}^* g) * f$.

(3.1) Lemma.

i) Sei $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Z})$ und $f \in L^2_0(\Omega)$. Sei zusätzlich $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{Z})$ oder $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dann gilt:

$$\mathbf{R}^* g * f = \mathbf{R}^* (g * \mathbf{R}f).$$

ii) Sei $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{T})$ und $f \in L^2_0(\Omega)$. Sei zusätzlich $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{T})$ oder $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dann gilt:

$$\mathbf{P}^* g * f = \mathbf{P}^* (g * \mathbf{P}f).$$

Beweis:

ii) Wegen der Voraussetzungen an f und g ist das Integral endlich:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\theta, E_\theta x - E_\theta y)| |f(y)| \, dy \, d\theta = \int_{S^{n-1}} \int_{\text{supp}(f)} |g(\theta, E_\theta x - E_\theta y)| |f(y)| \, dy \, d\theta < \infty.$$

Damit ist die Existenz der folgenden Integrale und die Anwendung des Satzes von Fubini gerechtfertigt.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* g * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^* g(x-y) f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x - E_\theta y) \, d\theta f(y) \, dy = \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta, E_\theta x - E_\theta y) f(y) \, dy \, d\theta = \quad (\text{mit } y = s\theta + z, \, z \in \theta^\perp, \, s \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, E_\theta x - z) f(s\theta + z) \, dz \, ds \, d\theta = \quad (\text{Fubini}) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, E_\theta x - z) \mathbf{P}f(\theta, z) \, dz \, d\theta = \int_{S^{n-1}} g * \mathbf{P}f(\theta, E_\theta x) \, d\theta = \mathbf{P}^* (g * \mathbf{P}f)(x). \end{aligned}$$

i) Analog zu ii), vgl. auch Natterer [34], Seite 14. $\square$

(3.2) Lemma. (Approximation der Eins)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx = 1$, $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$.

$(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ mit diesen Eigenschaften heißt *Approximation der Eins*.

i) Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) gilt

$$f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad (\text{für } \varepsilon \longrightarrow 0) \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n).$$

ii) Falls f gleichmäßig stetig auf $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, gilt

$$f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad (\text{für } \varepsilon \longrightarrow 0) \quad \text{gleichmäßig auf } \tilde{A} \subset\subset A.$$

Beweis:

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y) dy, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x) dy.$$

Mit $z := y/\varepsilon$ erhält man

$$\begin{aligned} (\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) (f(x-y) - f(x)) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) (f(x-\varepsilon z) - f(x)) dz. \end{aligned}$$

i) Wähle q so, daß $1/p + 1/q = 1$ ist, dann kann man mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung abschätzen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)|^{1/p} |\varphi(z)|^{1/q} |f(x-\varepsilon z) - f(x)| dz \right)^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| dz \right)^{p/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p dz \right) dx = \\ &= \|\varphi\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p dx \right) dz \longrightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Konvergenz gilt nach dem Satz von Lebesgue, wobei man die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p dx \leq 2^p \|f\|_p^p$$

und die Stetigkeit in der Norm $\|\cdot\|_p$ verwendet.

ii) Sei $\varepsilon_1 > 0$, dann existiert $r > 0$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_n(0,r)} |\varphi(x)| \, dx < \varepsilon_1.$$

Für alle $x \in A$ gilt:

$$|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leq \int_{K_n(0,r)} |\varphi(z) (f(x-\varepsilon z) - f(x))| \, dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_n(0,r)} |\dots| \, dz.$$

Da f gleichmäßig stetig auf A ist, gibt es zu ε_1 ein $\eta > 0$, so daß für alle $x \in \tilde{A}$ und $|h| < \eta$ gilt

$$|f(x) - f(x+h)| < \varepsilon_1 \text{ und wähle } \varepsilon < \eta/r.$$

Mit $z \in K_n(0,r)$ ist $|\varepsilon z| < \eta$ und es folgt

$$\int_{K_n(0,r)} |\varphi(z) (f(x-\varepsilon z) - f(x))| \, dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_n(0,r)} |\dots| \, dz \leq$$

$$\int_{K_n(0,r)} |\varphi(z)| \varepsilon_1 \, dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_n(0,r)} |\varphi(z)| 2 \|f\|_\infty \, dz \leq \varepsilon_1 (\|\varphi\|_1 + 2 \|f\|_\infty).$$

□

Die Aussage aus Lemma (3.2) wird meist für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ bewiesen und dann als Glättung oder Regularisierung bezeichnet (z.B. Wloka [58] I Satz 1.3 oder Adams [1] II. Lemma 2.18).

Die Funktionen φ_ε können auch als Folge aufgefaßt werden, die gegen die δ -Distribution konvergiert.

Mit Hilfe der beiden vorigen Lemmata kann man nun eine einfache Inversionsmethode für den Operator $\mathbf{P}$ im dreidimensionalen Fall herleiten.

(3.3) **Satz.** (Inversion des Operators $\mathbf{P}$, $n=3$)

Sei $f \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1/c & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3$$

mit $c := \frac{4\pi}{3}$. Sei $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-3} \varphi(x/\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$.

Dann gilt:

i) Die Funktion $\Phi_\varepsilon : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_\varepsilon(\theta, y) := \Phi_\varepsilon(|y|) := \Phi_\varepsilon(p)$ definiert durch

$$\Phi_\varepsilon(p) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi c \varepsilon^3} & \text{für } 0 \leq p \leq \varepsilon \\ \left(\arcsin \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} \right) / (2\pi^2 c \varepsilon^3) & \text{für } p > \varepsilon \end{cases}$$

löst die duale Gleichung $\mathbf{P}^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ ($n=3$).

ii) $\mathbf{P}^*(\Phi_\varepsilon * \mathbf{P}f) \longrightarrow f$ für $\varepsilon \longrightarrow 0$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Bemerkung: Φ_ε hängt nur vom Abstand p der durch θ und $y \in \theta^\perp$ definierten Geraden zum Ursprung ab.

Da φ , φ_ε rotationssymmetrisch sind, wird zur Vereinfachung der Notation

$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(|x|) = \varphi_\varepsilon(r)$ mit $r \geq 0$ gesetzt.

Beweis:

i) Es ist zu zeigen, daß für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\int_{S^2} \Phi_\varepsilon(|E_\theta x|) d\theta = \varphi_\varepsilon(x).$$

Sei $x = r\omega$ mit $\omega \in S^2$, $r = |x|$.

$$|E_\theta x| = \sqrt{|x|^2 - |\langle x, \theta \rangle|^2} = r \sqrt{1 - |\langle \omega, \theta \rangle|^2} \quad (\text{Pythagoras}).$$

$$\mathbf{P}^* \Phi_\varepsilon(r\omega) = \int_{S^2} \Phi_\varepsilon(r \sqrt{1 - |\langle \omega, \theta \rangle|^2}) d\theta = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi \Phi_\varepsilon(r \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha.$$

Es wurde dabei ohne Einschränkung $\omega = (0, 0, 1)^t$ gewählt, dies ist möglich, da über S^2 integriert wird.

Für $\theta \in S^2$ wurde die Darstellung $\theta = (\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha)^t$ eingesetzt. Nach diesen Umformungen ist nun zu zeigen:

$$2\pi \int_0^{\pi} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \varphi_{\epsilon}(r).$$

1. Fall: $r \leq \epsilon$

Dann gilt auch $r \sin \alpha \leq \epsilon$ und

$$\int_0^{\pi} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi \epsilon^3} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{4\pi \epsilon^3} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi \epsilon^3}.$$

Also erhält man $P^* \Phi_{\epsilon}(r\omega) = \varphi_{\epsilon}(r)$.

2. Fall: $r > \epsilon$

Es gilt $r \sin \alpha \leq \epsilon$, für $\sin \alpha \leq \epsilon/r$, also $\alpha \in [0, \beta] \cup [\pi - \beta, \pi]$ mit $\beta := \arcsin(\epsilon/r) \in (0, \pi/2)$ und $r \sin \alpha > \epsilon$ für $\alpha \in (\beta, \pi - \beta)$.

Nun kann man das folgende Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha &= \int_0^{\beta} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\beta}^{\pi - \beta} \dots + \int_{\pi - \beta}^{\pi} \dots \\ \int_0^{\beta} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha &= \int_0^{\beta} \frac{1}{4\pi \epsilon^3} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{4\pi \epsilon^3} \left(1 - \sqrt{1 - \epsilon^2/r^2}\right). \quad (1) \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich

$$\int_{\pi - \beta}^{\pi} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{4\pi \epsilon^3} \left(1 - \sqrt{1 - \epsilon^2/r^2}\right) \quad (2)$$

und das mittlere Integral läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\int_{\beta}^{\pi - \beta} \Phi_{\epsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon^3} \int_{\beta}^{\pi - \beta} \left(\arcsin \frac{\epsilon}{r \sin \alpha} - \frac{\epsilon}{\sqrt{r^2 \sin^2 \alpha - \epsilon^2}} \right) \sin \alpha \, d\alpha.$$

Man berechnet zuerst

$$\int_{\beta}^{\pi-\beta} \frac{\varepsilon \sin \alpha \, d\alpha}{(r^2 \sin^2 \alpha - \varepsilon^2)^{1/2}} = \frac{\varepsilon}{r} \arcsin \frac{-\cos \alpha}{(1-\varepsilon^2/r^2)^{1/2}} \Big|_{\beta}^{\pi-\beta} = \frac{\varepsilon}{r} \pi.$$

Mit Hilfe von partieller Integration findet man:

$$\int_{\beta}^{\pi-\beta} \arcsin \frac{\varepsilon}{r \sin \alpha} \sin \alpha \, d\alpha = -\arcsin \frac{\varepsilon}{r \sin \alpha} \cos \alpha \Big|_{\beta}^{\pi-\beta} -$$

$$- \int_{\beta}^{\pi-\beta} \frac{\varepsilon \cos^2 \alpha \, d\alpha}{r (1 - \varepsilon^2/(r \sin \alpha)^2)^{1/2} \sin^2 \alpha} =$$

$$= \pi (1 - (\varepsilon/r)^2)^{1/2} - \int_{\beta}^{\pi-\beta} \frac{\varepsilon \, d\alpha}{r \sin^2 \alpha (1 - \varepsilon^2/(r \sin \alpha)^2)^{1/2}} +$$

$$+ \int_{\beta}^{\pi-\beta} \frac{\varepsilon \, d\alpha}{r (1 - \varepsilon^2/(r \sin \alpha)^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon \pi}{r} + \pi (1 - (\varepsilon/r)^2)^{1/2} - \int_{\beta}^{\pi-\beta} \frac{\varepsilon \, d\alpha}{r \sin^2 \alpha (1 - \varepsilon^2/(r \sin \alpha)^2)^{1/2}}.$$

Man erhält:

$$\int_{\beta}^{\pi-\beta} \Phi_{\varepsilon}(r \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha =$$

$$\frac{1}{2\pi^2 c \varepsilon^3} \left(\pi (1 - (\varepsilon/r)^2)^{1/2} - \int_{\beta}^{\pi-\beta} \frac{\varepsilon \, d\alpha}{r \sin^2 \alpha (1 - \varepsilon^2/(r \sin \alpha)^2)^{1/2}} \right) \quad (3)$$

Faßt man (1) (2) und (3) zusammen, so bleibt zu zeigen, daß

$$\frac{1}{2\pi^2 c \varepsilon^3} \int_{\beta}^{\pi-\beta} \frac{\varepsilon \, d\alpha}{r \sin^2 \alpha (1 - \varepsilon^2/(r \sin \alpha)^2)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi c \varepsilon^3} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{2\varepsilon}{\pi r} \int_{\beta}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha (1 - \varepsilon^2/(r \sin \alpha)^2)^{1/2}} = 1 \quad (4)$$

(da der Integrand symmetrisch zur Achse $x = \pi/2$ ist).

Diese letzte Beziehung (4) zeigt man mit Hilfe der Substitution $r \sin \alpha = u$.

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon}{\pi r} \int_{\beta}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha (1 - \varepsilon^2 / (r \sin \alpha)^2)^{1/2}} &= \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_{\beta}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sin \alpha (r^2 \sin^2 \alpha - \varepsilon^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{2\varepsilon r}{\pi} \int_{\varepsilon}^r \frac{du}{u (u^2 - \varepsilon^2) (r^2 - u^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Mit $u^2 = t$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon r}{\pi} \int_{\varepsilon^2}^{r^2} \frac{dt}{2t (t - \varepsilon^2) (r^2 - t)^{1/2}} &= \frac{\varepsilon r}{\pi} \int_{\varepsilon^2}^{r^2} \frac{dt}{t (-t^2 + (\varepsilon^2 + r^2)t - \varepsilon^2 r^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{\varepsilon r}{\pi} \frac{1}{\varepsilon r} \arcsin \frac{(\varepsilon^2 + r^2)t - 2\varepsilon^2 r^2}{t(r^2 - \varepsilon^2)} \Big|_{\varepsilon^2}^{r^2} = 1 \end{aligned}$$

nach Bronstein [5] Formel 258, Seite 50.

ii) Folgt direkt aus Lemma (3.1) und (3.2), da $\varphi_{\varepsilon} = \mathbf{P}^* \Phi_{\varepsilon}$, $\varphi \geq 0$, $\|\varphi\|_1 = 1$ und $f \in L^{\infty}(\Omega)$, also auch $f \in L^2_0(\Omega)$, da Ω beschränkt ist. $\square$

Der Satz (3.3) für den Operator $\mathbf{P}$ und $n = 3$ entspricht dem folgenden Satz für den Fall $n = 2$, der von Nievergelt [36] angegeben wurde.

(3.4) **Satz.**

Sei $f \in L^{\infty}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1/c & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $c := \pi$, $\varphi_{\varepsilon}(x) := \varepsilon^{-2} \varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Dann gilt:

i) $\Phi_{\varepsilon} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, definiert durch

$$\Phi_{\varepsilon}(p) := \begin{cases} 1/(\pi \varepsilon^2) & \text{für } 0 \leq p \leq \varepsilon \\ \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \left(1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} \right) & \text{für } p > \varepsilon \end{cases}$$

löst die duale Gleichung $\mathbf{P}^* \Phi_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}$ ($n=2$).

$$\text{ii) } \mathbf{P}^*(\Phi_\epsilon * \mathbf{P}f) \longrightarrow f \text{ für } \epsilon \longrightarrow 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Beweis: Nievergelt [36]. $\square$

Die Sätze (3.3) und (3.4) enthalten eine Inversionsmethode für den Operator $\mathbf{P}$ im Fall $n=2$ und $n=3$. Die benötigten Hilfsmittel sind bei diesem Zugang viel einfacher als in der üblichen Theorie für die Inversion des Operators $\mathbf{P}$ (Smith [45], Natterer [34], II.2). Dieser didaktische Aspekt ist das wesentliche Anliegen in Nievergelts Veröffentlichung [36]. Der Satz (3.3) erweitert die Betrachtungen von Nievergelt (für $n=2$) um den dreidimensionalen Fall für den Operator $\mathbf{P}$.

Außerdem liefern obige Sätze ein Verfahren, das für praktische Rekonstruktionen verwendet werden kann: für genügend kleines ϵ berechnet man $\mathbf{P}^*(\Phi_\epsilon * g)$ und erhält eine Näherungslösung der Gleichung $\mathbf{P}f=g$.

Es stellt sich die Frage, ob für eine andere Wahl von Φ_ϵ auch der entsprechende Faltungskern Φ_ϵ gefunden werden kann; dies bedeutet die duale Gleichung $\mathbf{P}^*\Phi_\epsilon = \varphi_\epsilon$ zu lösen. Im zweidimensionalen Fall sind viele Kerne Φ_ϵ bekannt, der von Nievergelt verwendete (siehe (3.4)) geht auf Cho zurück. Die üblichen Methoden zum Berechnen von Faltungskernen für den zweidimensionalen Fall (siehe Natterer [34] V.1.1, Herman [18] 8.1) lassen sich aber nicht ohne weiteres für $n=3$ anwenden. Die Ansätze in der Literatur führen nur in Spezialfällen zu expliziten Darstellungen der dreidimensionalen Faltungskerne (Nievergelt [37], Smith [44]).

Im Kapitel III wird eine Methode hergeleitet, die es erlaubt, rotations-symmetrische Faltungskerne zu berechnen; insbesondere wurde der Kern aus Satz (3.3) auf diese Weise gefunden.

Kapitel II : Der Faltungsalgorithmus als Regularisierungsmethode

4. Sobolevräume und Radon-Gleichungen als schlecht gestellte Probleme

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der Operatoren R und P zusammengestellt, die sich auf Sobolevräume beziehen.

Sobolevräume sind ein wichtiges Hilfsmittel bei der Behandlung der Radon-Transformation. Wir folgen den Darstellungen aus Wloka [58], Kapitel I und Natterer [34], Kapitel VII.4; eine ausführliche Behandlung dieser Räume findet man z.B. bei Triebel [53], Adams [1] oder Lions [23].

Sei grundsätzlich in diesem Kapitel $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und mit regulärem Rand vorausgesetzt, und zwar ohne Einschränkung $\Omega = K_n(0,1)$. Wir definieren für $m \in \mathbb{N}_0$ den Raum

$$W_2^m(\Omega) := \{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega) \text{ für } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m \}.$$

$D^\alpha f$ stellt dabei die distributionelle Ableitung zum Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ dar

$$\text{und } |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

$W_2^m(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx$$

Für $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $s = [s] + \lambda$ mit $\lambda \in (0,1)$ definiert man

$$W_2^s(\Omega) := \{ f \in W_2^{[s]}(\Omega) : I_\lambda(D^{[s]}f) < \infty \text{ für } |\alpha| \leq [s] \},$$

$$\text{wobei } I_\lambda(f) := \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2\lambda}} dx dy.$$

$$\|f\|_s := \|f\|_{[s]} + \sum_{|\alpha| \leq [s]} I_\lambda(D^\alpha f).$$

Wir bezeichnen den Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ im Raum $W_2^s(\Omega)$ mit $\tilde{W}_2^s(\Omega)$:

$$\tilde{W}_2^s(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W_2^s(\Omega)}.$$

Sei $\mathcal{S}$ der Raum der schnell fallenden Funktionen (Schwartz-Raum)

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^m |D^\alpha f(x)| < \infty \text{ für } m \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \}$$

und $\mathcal{S}'$ der Raum der temperierten Distributionen, das sind die stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}$.

Es gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p \leq \infty$.

Die Räume $\mathcal{S}(Z)$ bzw. $\mathcal{S}(T)$ sind definiert durch Einschränkung der Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ auf Z bzw. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ auf T (Natterer [34], Seite 10).

Für $s \in \mathbb{R}$ definiert man

$$H^s := H^s(\mathbb{R}^n) := \{ \varphi \in \mathcal{S}' : \|\varphi\|_{H^s}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi < \infty \}$$

Es gilt $W_2^s(\mathbb{R}^n) \simeq H^s$, wenn $s \geq 0$ ist d.h. die Räume sind isomorph und die Normen äquivalent (Wloka [58] I. Satz 5.2). Der Raum $H_0^s(\Omega)$, definiert als abgeschlossene Hülle von $C_0^\infty(\Omega)$ in H^s ist isomorph zu $\tilde{W}_2^s(\Omega)$ (mengenmäßig und topologisch).

Nach Triebel [53], 4.3.2.1. c) gilt für $s = 1/2 + k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$H_0^s(\Omega) = \{ f \in H^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \subset \bar{\Omega} \}.$$

Auf Z und T werden die Sobolevräume $H^s(Z)$ und $H^s(T)$ definiert durch die Normen

$$\|g\|_{H^s(Z)}^2 := \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (1 + \sigma^2)^s |\hat{g}(\theta, \sigma)|^2 d\sigma d\theta$$

$$\|g\|_{H^s(T)}^2 := \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} (1 + |\eta|^2)^s |\hat{g}(\theta, \eta)|^2 d\eta d\theta.$$

Wichtige Ergebnisse über die Eigenschaften der Operatoren $\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$ auf Sobolevräumen gehen auf Natterer [29] und Louis [24] zurück. Der folgende Satz enthält die wesentliche Stetigkeitsaussage dieser Operatoren auf Sobolevräumen.

(4.1) Satz.

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ existieren positive Konstante $c(s,n)$ und $C(s,n)$, so daß für $f \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt :

$$c(s,n) \|f\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \|\mathbf{R}f\|_{H^{s+(n-1)/2}(\mathbb{Z})} \leq C(s,n) \|f\|_{H_0^s(\Omega)}$$

beziehungsweise

$$c(s,n) \|f\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \|\mathbf{P}f\|_{H^{s+1/2}(\mathbb{T})} \leq C(s,n) \|f\|_{H_0^s(\Omega)}$$

Beweis: Natterer [34] II. Theorem 5.1. (vgl. auch Louis, Natterer [27] Thm. 3.1) □

Als Folgerung erhält man, daß die Operatoren $\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$, sowie ihre Inversen im Falle obiger Sobolevräume stetig sind. Wählt man $s = (1-n)/2$ bzw. $s = -1/2$, so folgt, daß die Inversen als Abbildungen von L^2 -Räumen nicht stetig sind, d.h.

$$\mathbf{R}^{-1} : \text{Im}(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{P}^{-1} : \text{Im}(\mathbf{P}) \subset L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

sind unstetige Operatoren (Natterer [34], IV.1 und [33] (2.6)).

Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Eine Operatorgleichung $Af = g$ mit stetigem Operator $A : H_1 \longrightarrow H_2$ heißt *korrekt gestellt (well-posed)*, falls A injektiv, surjektiv und A^{-1} stetig ist (Groetsch [15], 1.1), andernfalls heißt die Gleichung *inkorrekt* oder *schlecht gestellt (ill-posed)*.

Die Gleichungen $Rf = g$, $Pf = g$ sind wegen der Unstetigkeit der Inversen in L^2 -Räumen schlecht gestellt. Für die praktische Rechnung ergibt sich die Konsequenz, daß kleine Störungen in der rechten Seite große Fehler in der berechneten Lösung bewirken können. Um diese Eigenschaft quantitativ zu erfassen hat Natterer die folgende Analyse vorgeschlagen.

Es sei $A : H_0^{-\alpha}(\Omega) \longrightarrow K$ stetig, $\alpha \geq 0$, K ein Hilbertraum und es gelte

$$m \|f\|_{H_0^{-\alpha}(\Omega)} \leq \|Af\|_K \leq M \|f\|_{H_0^{-\alpha}(\Omega)}$$

mit positiven Konstanten m und M .

Außerdem sei $f \in H_0^\beta(\Omega)$ und $\|f\|_{H_0^\beta(\Omega)} \leq \rho$ mit $\beta, \rho > 0$; dies kann als Glattheitsvoraussetzung an f interpretiert werden. In der Gleichung $Af = g$ sei statt g nur eine Näherung g^δ mit $\|g - g^\delta\|_K \leq \delta$ bekannt.

Für die exakte Lösung f hat man nun

$$\|Af - g^\delta\|_K \leq \delta, \quad \|f\|_{H_0^\beta(\Omega)} \leq \rho \quad (*)$$

Falls f_1, f_2 obige Ungleichungen $(*)$ erfüllen, folgt

$$\|A(f_1 - f_2)\|_K \leq 2\delta, \quad \|f_1 - f_2\|_{H_0^\beta(\Omega)} \leq 2\rho.$$

Setzt man

$$d^\wedge(\delta, \rho) := \sup \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} : \|Af\|_K \leq \delta, \|f\|_{H_0^\beta} \leq \rho \},$$

so folgt $\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \leq d^\wedge(2\delta, 2\rho)$,

also ist der größtmögliche Fehler bei der Berechnung von f aus fehlerhaften Daten g^δ unter den Bedingungen $(*)$ durch $d^\wedge(2\delta, 2\rho)$ gegeben.

Das Verhalten von $d^\wedge(\delta, \rho)$ für $\delta \rightarrow 0$ wird durch die folgende Aussage deutlich.

(4.2) Satz.

Mit obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt

$$d^{\wedge}(\delta, \rho) \leq c(m, \alpha, \beta) \delta^{\beta/(\alpha+\beta)} \rho^{\alpha/(\alpha+\beta)}.$$

Beweis:

Wir schätzen mit der Hölder-Ungleichung ab.

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [(1 + |\xi|^2)^{-\alpha} |\hat{f}(\xi)|^2]^{\beta/(\alpha+\beta)} [(1 + |\xi|^2)^{\beta} |\hat{f}(\xi)|^2]^{\alpha/(\alpha+\beta)} d\xi \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-\alpha} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\beta/(\alpha+\beta)} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\beta} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\alpha/(\alpha+\beta)} \\ &\leq [\|f\|_{H_{\mathcal{O}}^{-\alpha}(\Omega)}^2]^{\beta/(\alpha+\beta)} [\|f\|_{H_{\mathcal{O}}^{\beta}(\Omega)}^2]^{\alpha/(\alpha+\beta)} \leq \left[\frac{1}{m} \|Af\|_{\mathcal{K}}^2 \right]^{\beta/(\alpha+\beta)} [\rho^2]^{\alpha/(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung:

Der Beweis bei Natterer [34] IV.1. benutzt die Interpolationsungleichung für Sobolevräume, die bei obigem direkten Nachweis umgangen wurde; da die Interpolationsungleichung in diesem Fall auch mit ähnlichen Abschätzungen gezeigt werden kann, ist die Vereinfachung hauptsächlich auf begrifflicher Ebene zu sehen.

Der Exponent $\beta/(\alpha + \beta)$ kann als Maß für die Größenordnung des Fehlers bei der Berechnung von f betrachtet werden.

(4.3) Folgerung.

Mit $A = R$ beziehungsweise $A = P$ gilt:

$$d^R(\delta, \rho) \leq c(n, \beta) \delta^{2\beta/(n-1+2\beta)} \rho^{(n-1)/(n-1+2\beta)} \quad \text{bzw.}$$

$$d^P(\delta, \rho) \leq c(n, \beta) \delta^{2\beta/(1+2\beta)} \rho^{1/(1+2\beta)}$$

unter den Voraussetzungen von Satz (4.2).

Beweis:

Mit den Abschätzungen aus (4.1) und Satz (4.2) folgt die Aussage, wenn $\alpha = (n-1)/2$ bzw. $\alpha = 1/2$ gesetzt wird. $\square$

Nach Natterer [29] ist für Funktionen, die Grauwertbilder aus der Radiologie darstellen, die Annahme plausibel, daß β ungefähr in der Nähe von $1/2$ liegt. Damit erhält man für R und $n=2$ bzw. $n=3$ die Fehlerordnungen $1/2$ bzw. $1/3$, d. h. $d^R(\delta, \rho) = O(\delta^{1/2})$ bzw. $O(\delta^{1/3})$, während man für P dimensionsunabhängig die Ordnung $1/2$ erhält. Ein solches Verhalten bezeichnet Natterer als *mäßig schlecht gestellt* (siehe [33], [34]).

Gleichungen mit unvollständigen Daten sind meist *sehr schlecht gestellt* in dem Sinne, daß $\alpha \gg \beta$, also $\beta/(\alpha+\beta)$ sehr klein ist. Insbesondere ist das dreidimensionale Problem für den Operator P mit unvollständigen Daten nach Untersuchungen von Finch [12] sehr schlecht gestellt.

Über die Wertemenge des Operators P läßt sich die folgende Aussage formulieren.

(4.4) Satz.

Der Operator $P : H_0^s(\Omega) \longrightarrow H_0^{s+1/2}(T)$ ist stetig, invertierbar auf seinem Bild und die Inverse ist stetig ($s \geq 0$).

Sei g eine meßbare Funktion auf T . Es gilt $g = Pf$ für ein $f \in H_0^s(\Omega)$ genau dann, wenn

a) $g \in H_0^{s+1/2}(T)$,

b) $g(0, x) = 0$ für jede Gerade durch x , die Ω nicht trifft.

c) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\theta \in S^{n-1}$ mit $\langle \theta, \xi \rangle = 0$ ist

$$p_{m,\theta}(\xi) := \int_{\theta^\perp} \langle x, \xi \rangle^m g(\theta, x) \, dx$$

unabhängig von θ und die Funktion $p_m(\xi) := p_{m,\theta}(\xi)$ ist ein homogenes Polynom vom Grad kleiner gleich m .

Beweis: Finch [13], Theorem 2.4. $\square$

Der Satz zeigt, daß der Wertebereich von $\mathbf{P}$ sehr genau charakterisiert werden kann. Eine ähnliche Aussage gilt auch für $\mathbf{R}$.

(4.5) **Satz.**

Eine Funktion g ist Radon-Transformierte einer Funktion $f \in \mathcal{S}$ genau dann, wenn

a) $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$,

b) g ist gerade in θ und s ,

c) $\int_{\mathbb{R}} g(\theta, s) s^k \, ds$

ist ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich k in θ (für $k \in \mathbb{N}_0$).

Beweis: Ludwig [28], Theorem 2.1, siehe auch Louis [24] Thm. 3.1 $\square$

Die Charakterisierung der Funktionen im Bild der Operatoren $\mathbf{P}$ bzw. $\mathbf{R}$ hat insbesondere für Gleichungen mit unvollständigen Daten eine große praktische Bedeutung; man benutzt sie zur konsistenten Ergänzung der Daten (Louis [24], Natterer [31]).

Andererseits erkennt man, daß der Operator

$$\mathbf{P} : L^2_0(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$$

nicht surjektiv ist (ebenso $\mathbf{R}$).

Dies ist ein weiterer Aspekt für die Eigenschaft "schlecht gestellt", der aber hier nicht weiter untersucht wird.

5. Regularisierung durch Faltung

Seien H_1, H_2 Hilberträume, $A : H_1 \longrightarrow H_2$ ein stetiger und invertierbarer Operator mit unstetiger Inversen. Eine Familie von stetigen Operatoren $R_\varepsilon : H_2 \longrightarrow H_1$ mit $\|R_\varepsilon g - f\| \longrightarrow 0$ für $\varepsilon \longrightarrow 0$ heißt *Regularisierung* der schlecht gestellten Gleichung $Af = g$ (Groetsch [15]).

Wir zeigen, daß der Faltungsalgorithmus eine Regularisierung in obigem Sinne ist. Außerdem werden noch einige Varianten zur Approximation der Eins und eine Aussage zur Konvergenzgeschwindigkeit der gefilterten Rückprojektion dargestellt.

(5.1) Satz. (Faltungsalgorithmus als Regularisierung)

Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Approximation der Eins, d.h. φ integrierbar, mit Integral 1,

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon).$$

i) Sei $\Phi_\varepsilon \in L^1(T) \cap L^2_{loc}(T)$ Lösung der dualen Gleichung $P^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ (im $\mathbb{R}^n$)

und $Pf = g$ mit $f \in L^2_0(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist.

Der Operator $Q_\varepsilon : L^2(T) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$Q_\varepsilon g := \chi_\Omega P^*(\Phi_\varepsilon * g),$$

ist stetig und hat die Eigenschaft

$$Q_\varepsilon g \longrightarrow f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

ii) Die analoge Aussage gilt auch für $\mathbb{R}$.

Ist $\Phi_\varepsilon \in L^1(Z) \cap L^2_{loc}(Z)$ Lösung von $R^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ (im $\mathbb{R}^n$) und $Rf = g$ mit

$f \in L^2_0(\Omega)$, so ist der Operator $Q_\varepsilon : L^2(Z) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$Q_\varepsilon g := \chi_\Omega R^*(\Phi_\varepsilon * g), \quad \text{stetig und es gilt}$$

$$Q_\varepsilon g \longrightarrow f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Beweis:

i) Mit $f \in L^2_0(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \|P^*(\Phi_\varepsilon * g) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|P^*(\Phi_\varepsilon * g) - f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P^*(\Phi_\varepsilon * g) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}^2 \\ &= \|Q_\varepsilon g - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|P^*(\Phi_\varepsilon * g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}^2. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert die linke Seite gegen 0 nach Lemma (3.1) und (3.2), also gilt auch

$$\|Q_\varepsilon g - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Stetigkeit von Q_ε :

Bezeichnet man zur Abkürzung $h_\varepsilon := \Phi_\varepsilon * g$, so gilt:

$$\|Q_\varepsilon g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|P^* h_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left| \int_{S^{n-1}} h_\varepsilon(\theta, E_\theta x) d\theta \right|^2 dx \leq$$

$$\leq c_1 \int_{\Omega} \int_{S^{n-1}} |h_\varepsilon(\theta, E_\theta x)|^2 d\theta dx =$$

$$= c_1 \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega(x) |h_\varepsilon(\theta, E_\theta x)|^2 d\theta dx =$$

$$= c_1 \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^1} \chi_\Omega(s\theta + y) |h_\varepsilon(\theta, y)|^2 dy ds d\theta \leq$$

$$\leq c_2 \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} |h_\varepsilon(\theta, y)|^2 dy d\theta \leq c_3 \|g\|_{L^2(T)}^2,$$

da $\Phi_\varepsilon \in L^1(T)$, $\Phi_\varepsilon(\theta, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ und $h_\varepsilon = \Phi_\varepsilon * g$.

$c_1, c_2, c_3 > 0$ sind geeignete Konstanten.

ii) Analog zu i).

□

Bemerkung:

Obwohl die Radon-Gleichungen vielfach in der Literatur als schlecht gestellte Probleme untersucht wurden, tritt der Faltungsalgorithmus in diesem Zusammenhang nicht auf. Es wurden z.B. Tichonov-Phillips-Regularisierungsmethoden von Natterer [30], [31] und Louis [26] zur numerischen Behandlung der Radon-Gleichungen vorgeschlagen.

Für die hier angegebene Interpretation des Faltungsalgorithmus als Regularisierung ist die Einschränkung der eigentlichen gefilterten Rückprojektion $P^{\#}(\Phi_{\varepsilon} * g)$ auf Ω entscheidend für die Stetigkeit von Q_{ε} . Dies wird jedoch durch die praktische Realisierung des Faltungsalgorithmus nahegelegt: man rekonstruiert die unbekannte Dichtefunktion f nur auf Ω , außerhalb ist sie Null.

Grundlegend für den Faltungsalgorithmus ist das Lemma (3.2) aus Kapitel I (Approximation der Eins). Es wird noch eine weitere Version für die Approximation der Eins angegeben.

(5.2) Lemma. (Approximation der Eins in Sobolevräumen)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^{\infty}(K_n(0,1))$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$, $\varphi_{\varepsilon}(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$.

Sei $f \in W_2^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, f habe kompakten Träger in $\Omega' \subset \subset \Omega$.

Dann gilt:

- i) $f * \varphi_{\varepsilon} \rightarrow f$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $W_2^s(\Omega)$.
- ii) $f * \varphi_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ und $\text{supp}(f * \varphi_{\varepsilon}) \subset \Omega' + \varepsilon \subset \subset \Omega$ für genügend kleines ε .

Beweis: Wloka [58], I. 3.2, Lemma 3.3. □

Da für Bildrekonstruktionen die Annahme $f \in W_2^s(\Omega)$ mit s in der Nähe von $1/2$ sinnvoll ist (siehe Natterer [29]), zeigt obiges Lemma die Konvergenz des Faltungsalgorithmus auch in der entsprechenden Sobolevnorm.

Zur Konvergenzgeschwindigkeit der Approximation der Eins und somit des Faltungsalgorithmus kann die folgende einfache Abschätzung angegeben werden (siehe auch Nievergelt [37] 3.5).

(5.3) Lemma.

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$, $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$, $\varphi \geq 0$,

$\text{supp } \varphi \subset K_n(0,1)$ und f stetig, dann gilt:

$$|f(x) - f * \varphi_\varepsilon(x)| \leq \omega(f, \varepsilon),$$

wobei ω der Stetigkeitsmodul ist

$$\omega(f, s) := \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| < s \}.$$

Falls f kompakten Träger hat, gilt:

$$\|f - f * \varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \omega(f, \varepsilon).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \varphi_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) f(x) dz - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) f(x - \varepsilon z) dz \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) |f(x) - f(x - \varepsilon z)| dz \leq \int_{K_n(0,1)} \varphi(z) \omega(f, \varepsilon) dz \leq \omega(f, \varepsilon). \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Die Konvergenzeigenschaften des Faltungsalgorithmus hängen nur von der gewählten Approximation der Eins ab, und nicht vom Operator R bzw. P . Da der Faltungsalgorithmus in der Praxis als Regularisierungsmethode wirkt, ist bei gestörten Daten der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht sinnvoll. Man wählt ein $\varepsilon > 0$, das zwar "klein genug" ist, jedoch die Störungen der Daten glättet; die Wahl eines geeigneten Regularisierungsparameters ε fällt in der Anwendung stärker ins Gewicht als die Konvergenzordnung.

6. Zur Wahl des Regularisierungsparameters

Bei schlecht gestellten Problemen, die durch Regularisierung behandelt werden, ist es erfahrungsgemäß schwierig, einen geeigneten Regularisierungsparameter a priori zu finden; man behilft sich meist mit Heuristik und Ausprobieren. Es wurden auch systematische Methoden entwickelt und untersucht (Groetsch [15]).

Was die Lösung von Radon-Gleichungen mit dem Faltungsalgorithmus betrifft, wird durch die Approximation der Eins (Kapitel I, Lemma (3.2)) nahegelegt, den Regularisierungsparameter ϵ sehr klein zu wählen. Andererseits bewirken Störungen in der rechten Seite der Gleichung, sowie die Diskretisierung, daß ϵ nicht zu klein gewählt werden darf. Herman hat in [18], 8.3 die Wahl des Regularisierungsparameters für den zweidimensionalen Faltungsalgorithmus bei vorgegebener Diskretisierung mit Hilfe der Fourier-Transformation untersucht (vgl. auch Natterer [34], V.1). Diese Überlegungen werden nun auf den dreidimensionalen Fall und den Operator $\mathbf{P}$ übertragen.

(6.1) Definition.

Eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ heißt *b-bandbeschränkt* mit $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, wenn $\hat{f}(\xi)$ Null ist für $|\xi| > b$. Die Zahl b heißt *Bandbreite*.

Für praktische Zwecke ist der folgende Begriff nützlich (obwohl nicht exakt): f heißt *annähernd b-bandbeschränkt*, wenn $\hat{f}(\xi)$ "vernachlässigbar klein" ist für $|\xi| > b$ in einem nicht nicht weiter präzisierten Sinn. (vgl. Natterer [34] III.1).

Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen den Operatoren $\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$ sowie der Fourier-Transformation.

(6.2) Lemma. (Projektionssatz)

Für $f \in L^2_\Omega$ oder $f \in \mathcal{S}$, $\theta \in S^{n-1}$ gilt

$$i) \quad (\mathbf{R}f(\theta, \cdot))^{\wedge}(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta) \quad , \quad \theta \in S^{n-1}, \sigma \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad (\mathbf{P}f(\theta, \cdot))^{\wedge}(\eta) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\eta) \quad , \quad \eta \in \theta^\perp.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } (\mathbf{Pf}(\theta, \cdot))^{\wedge}(\eta) &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^{\perp}} e^{-i \langle \eta, y \rangle} \mathbf{Pf}(\theta, y) \, dy = \\
 &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^{\perp}} e^{-i \langle \eta, y \rangle} \int_{\mathbb{R}} f(y + t\theta) \, dt \, dy = \\
 &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \langle \eta, x \rangle} f(x) \, dx = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\eta) \quad , \quad \eta \in \theta^{\perp}
 \end{aligned}$$

i) Analog zu ii), siehe auch Natterer [34], I Theorem 1.1. □

Um Diskretisierungsfehler bei der Berechnung von Faltungen abzuschätzen, wird folgende Hilfsaussage benötigt.

(6.3) Lemma.

Seien u, v Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Für die *diskrete Faltung*

$$\begin{aligned}
 (u \overset{h}{*} v)(y) &:= h^n \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} u(lh) v(y-lh) \quad \text{zur Schrittweite } h \text{ gilt:} \\
 (u \overset{h}{*} v)^{\wedge}(\xi) - (u * v)^{\wedge}(\xi) &= (2\pi)^{n/2} \hat{u}(\xi) \sum_{\substack{l \neq 0 \\ l \in \mathbb{Z}^n}} \hat{v}(\xi - 2\pi l/h) \quad ,
 \end{aligned}$$

falls sämtliche Summen und Fourier-Transformierten existieren.

Beweis: Natterer [34], III.1, (1.7). □

Wir gehen nun von der Operatorgleichung $\mathbf{Pf} = g$ aus. Mit einer Approximation der Eins φ_{ε} und $\mathbf{P}^{\#} \Phi_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}$ berechnet man mit dem Faltungsalgorithmus

$$Q_{\varepsilon} g = \chi_{\Omega} \mathbf{P}^{\#}(\Phi_{\varepsilon} * g)$$

als Näherung an f mit vorgegebenem $\varepsilon > 0$. Falls g für jedes $\theta \in S^{n-1}$ nur auf einem äquidistanten Gitter mit der Schrittweite $h > 0$ auf $\theta^{\perp} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ bekannt ist, d.h. $g(\theta, lh)$ mit $l \in \mathbb{Z}^{n-1}$, so ersetzt man die Faltung $\Phi_{\varepsilon} * g(\theta, \cdot)$

durch die diskrete Faltung

$$\Phi_{\varepsilon}^h g(\theta, y) = h^{n-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}^{n-1}} \Phi_{\varepsilon}(\theta, lh) g(\theta, y-lh)$$

mit geeigneten Koordinaten auf $\theta^{\perp} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$.

Man betrachtet nun

$$f_F = \chi_{\Omega} P^*(\Phi_{\varepsilon}^h g)$$

als Näherung an f . Es stellt sich die Frage, wie der Parameter ε bei vorgegebener Schrittweite h zu wählen ist, so daß der durch die Diskretisierung der Faltung bedingte Fehler

$$e := f_F - Q_{\varepsilon} g$$

möglichst klein wird.

Eine Fehlerabschätzung für e wird im nächsten Satz hergeleitet.

(6.4) Satz.

Sei $f \in L^2_{\Omega}(\Omega)$, Φ_{ε} , Φ_{ε}^h wie im Satz (5.1), $\varepsilon > 0$ fest gewählt, Φ_{ε} sei unabhängig von der Richtung (d.h. $\Phi_{\varepsilon}(\theta, y) = \Phi_{\varepsilon}(y)$) und b -bandbeschränkt mit $b \leq \pi/h$.

Außerdem sei $\hat{\Phi}_{\varepsilon}$ beschränkt, d.h. es gibt ein $M > 0$ mit

$$|\hat{\Phi}_{\varepsilon}(\eta)| \leq M \quad \text{für alle } \eta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Dann gilt:

$$|e(x)| \leq \sqrt{2\pi} \, M \, |S^{n-1}| \sup_{\theta \in S^{n-1}} \int_{\substack{\xi \in \theta^{\perp} \\ |\xi| \geq b}} |\hat{f}(\xi)| \, d\xi \quad (\text{fast überall auf } \mathbb{R}^n).$$

Beweis:

Für festes $\theta \in S^{n-1}$ läßt sich mit Hilfe von Lemma (6.3) schreiben ($(n-1)$ statt n) :

$$(\Phi_{\varepsilon}^h * g - \Phi_{\varepsilon} * g)^{\wedge}(\theta, \sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{\Phi}_{\varepsilon}(\sigma) \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^{n-1} \\ l \neq 0}} \hat{g}(\theta, \sigma - 2\pi l/h),$$

$$\sigma \in \mathbb{R}^{n-1} \simeq \theta^{\perp}.$$

Die inverse Fourier-Transformation ergibt zusammen mit der Bandbeschränktheit von Φ_{ε} :

$$|\Phi_{\varepsilon}^h * g - \Phi_{\varepsilon} * g|(\theta, y) \leq \int_K |\hat{\Phi}_{\varepsilon}(\sigma)| \sum_{l \neq 0} |\hat{g}(\theta, \sigma - 2\pi l/h)| d\sigma \quad \text{für jedes } y \in \theta^{\perp},$$

wobei zur Abkürzung $K := K_{n-1}(0, b)$ gesetzt wurde.

Verwendet man die Beschränktheit von $\hat{\Phi}_{\varepsilon}$ und die Bedingung $b \leq \pi/h$, so folgt:

$$\begin{aligned} |\Phi_{\varepsilon}^h * g - \Phi_{\varepsilon} * g|(\theta, y) &\leq M \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus K} |\hat{g}(\theta, \sigma)| d\sigma = \\ &= \sqrt{2\pi} M \int_{\substack{\xi \in \theta^{\perp} \\ |\xi| \geq b}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \quad (\text{nach Lemma (6.2)}) \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{2\pi} M \sup_{\theta \in S^{n-1}} \int_{\substack{\xi \in \theta^{\perp} \\ |\xi| \geq b}} |\hat{f}(\xi)| d\xi.$$

Die Anwendung von P^* liefert die Behauptung. □

Aus Satz (6.4) ist ersichtlich, daß der Fehler e klein ist, wenn f b -bandbeschränkt (oder annähernd b -bandbeschränkt) ist. In diesem Fall sind die Bedingungen sinnvoll:

- (1) Φ_{ε} b -bandbeschränkt (oder annähernd b -bandbeschränkt),
- (2) $b \leq \pi/h$.

Auf den Zusammenhang zwischen b und ε wird in Kapitel V eingegangen. Die obige Bedingung für b ist auch (abgesehen von der Diskretisierung) für das Glätten von hochfrequenten Störungen in den Daten angemessen.

Sei $s : T \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Störung, $g^s := g + s$ die fehlerhaften Daten, die zur Rechnung verwendet werden. Der Fehler

$$e_1 := P^*(\Phi_\varepsilon * g^s) - P^*(\Phi_\varepsilon * g)$$

läßt sich schreiben als:

$$e_1 = P^*(\Phi_\varepsilon * s).$$

Fourier-Transformation und Faltungssatz liefern:

$$(\Phi_\varepsilon * s)^\wedge(\theta, \eta) = \hat{\Phi}_\varepsilon(\eta) \hat{s}(\theta, \eta), \quad \eta \in \theta^\perp.$$

Mit inverser Fourier-Transformation erhält man

$$\begin{aligned} |\Phi_\varepsilon * s|(\theta, y) &\leq (2\pi)^{(1-n)/2} \int_{\theta^\perp} |\hat{\Phi}_\varepsilon(\eta)| |\hat{s}(\theta, \eta)| d\eta = \\ &= (2\pi)^{(1-n)/2} \int_{\substack{\theta^\perp \\ |\eta| \leq b}} |\hat{\Phi}_\varepsilon(\eta)| |\hat{s}(\theta, \eta)| d\eta = (2\pi)^{(1-n)/2} M \int_{\substack{\theta^\perp \\ |\eta| \leq b}} |\hat{s}(\theta, \eta)| d\eta. \end{aligned}$$

Es folgt durch Anwendung von P^*

$$|e_1(x)| \leq (2\pi)^{(1-n)/2} M |S^{n-1}| \sup_{\theta \in S^{n-1}} \int_{\substack{\theta^\perp \\ |\eta| \leq b}} |\hat{s}(\theta, \eta)| d\eta \quad (\text{f.ü.}).$$

Man erkennt, daß e_1 klein wird, falls $\hat{s}$ klein ist für $|\eta| \leq b$ (d.h. falls s eine hochfrequente Störung ist).

Kapitel III : Die Bestimmung von Faltungskernen für die gefilterte Rückprojektion

7. Die dualen Gleichungen im rotationssymmetrischen Fall

Die Berechnung von Faltungskernen (auch *Filter* genannt) für den Faltungsalgorithmus bedeutet nach Kapitel I, Abschnitt 3 das Lösen der dualen Gleichung $\mathbf{P}^* \Phi_\epsilon = \varphi_\epsilon$ bzw. $\mathbf{R}^* \Phi_\epsilon = \varphi_\epsilon$, wobei φ_ϵ eine vorgegebene Approximation der Eins ist. Ein übliches Vorgehen (insbesondere für den zweidimensionalen Fall) besteht in der Anwendung der klassischen Inversionsformeln.

Sei $\mathbf{R}f = g$, $f \in C_0^\infty(\Omega)$, dann gilt die folgende Inversionsformel für die Radon-Transformation

$$f(x) = \begin{cases} c_n \mathbf{R}^* H D^{(n-1)} g(x) & \text{für } n \text{ gerade} \\ c_n \mathbf{R}^* D^{(n-1)} g(x) & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$D^{(n-1)}$ ist die $(n-1)$ -te Ableitung bezüglich der zweiten Variablen, c_n eine Konstante und H die Hilberttransformation (ebenfalls bezüglich der zweiten Variablen):

$$Hh(s) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{s-t} dt, \quad \text{als Cauchy-Hauptwert.}$$

Für die Herleitung der Formeln, die auf J. Radon (1917) zurückgehen, verweisen wir auf Natterer [34] II.2 (Seite 20).

Man erkennt, daß der Operator S , definiert durch

$$Sf := c_n H D^{(n-1)} \mathbf{R}f,$$

rechtsinvers ist zu $\mathbf{R}^*$ (d.h. $\mathbf{R}^* Sf = f$, wegen obiger Inversionsformel).

Also löst $S\varphi_\epsilon =: \Phi_\epsilon$ die duale Gleichung $\mathbf{R}^* \Phi_\epsilon = \varphi_\epsilon$.

Für den Operator $\mathbf{P}$ gilt die folgende Formel (Smith [45], Natterer [34] II.2)

$$f = \gamma_n \mathbf{P}^* \Lambda g \quad \text{mit } g = \mathbf{P}f, \quad f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dabei ist Λ definiert durch $(\Lambda f)^\wedge(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi)$ (Calderon-Operator) und γ_n eine geeignete Konstante.

Der Operator $S_{\mathbf{P}}$, $S_{\mathbf{P}} f := \gamma_n \Lambda \mathbf{P}f$ ist rechtsinvers zu $\mathbf{P}^*$, also löst

$$S_{\mathbf{P}} \varphi_\varepsilon =: \Phi_\varepsilon \quad \text{die Gleichung} \quad \mathbf{P}^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon.$$

Während für $n = 2$ mit obiger Methode Faltungskerne Φ_ε explizit berechnet werden können (meist werden Fourier-Methoden zur Vereinfachung der Ausdrücke verwendet), läßt sich die praktische Auswertung der Operatoren S , $S_{\mathbf{P}}$ für $n \geq 3$ i.allg. nicht ohne weiteres durchführen.

So haben z.B. Leahy u.a. ([22] Abschnitt 8) mit Hilfe von $S_{\mathbf{P}}$ für $n = 3$ und $\varphi(x) = \varphi(r) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-r^2/2)$, $r = |x|$ die folgende Darstellung für eine Lösung Φ von $\mathbf{P}^* \Phi = \varphi$ angegeben:

$$\Phi(y) = \Phi(p) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty \exp(-s^2/2) J_0(ps) s^2 ds,$$

$y \in \theta^\perp$, $|y| = p$ und Φ ist unabhängig von θ .

Mit J_0 wurde die Bessel-Funktion der Ordnung 0 bezeichnet.

Die numerische Auswertung von $\Phi(p)$ scheint in dieser Form problematisch und auf jeden Fall recht aufwendig zu sein.

Es wird nun ein anderer Zugang zum Lösen von $\mathbf{P}^* \Phi = \varphi$ bzw. $\mathbf{R}^* \Phi = \varphi$ entwickelt, der ohne die obigen Inversionsformeln auskommt und Ausdrücke für Φ liefert, die in den meisten Fällen ohne Schwierigkeiten explizit berechnet werden können.

Für φ wird vorausgesetzt, daß $\varphi(x) = \varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = |y|$, d.h. φ ist rotationssymmetrisch (radial). Zur Vereinfachung bezeichnen wir in diesem Fall $\varphi(r) = \varphi(x)$ mit $r = |x|$. Da φ bzw. φ_ε im Zusammenhang mit dem Faltungsalgorithmus eine Approximation der Eins ist, wird die

Rotationssymmetrie meist erfüllt sein; diese Voraussetzung bedeutet also keine wesentliche Einschränkung für die praktische Anwendung.

Der folgende Satz ist grundlegend für die weiteren Betrachtungen; die dualen Gleichungen werden mit speziellen Volterraschen Integralgleichungen in Beziehung gesetzt.

(7.1) **Satz.**

Sei $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ rotationssymmetrisch, $\varphi(x) = \varphi(r)$, $r \geq 0$, $n \geq 2$.

$\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{T})$ sei rotationssymmetrisch d.h. nur abhängig vom Abstand der Geraden zum Ursprung. Dann gilt:

Φ ist Lösung der dualen Gleichung $\mathbf{P}^* \Phi = \varphi$ genau dann, wenn Φ Lösung der Volterraschen Integralgleichung

$$(7.2) \quad c_n \int_0^r \Phi(t) \frac{t^{n-2}}{r^{n-2}} (r^2 - t^2)^{-1/2} dt = \varphi(r), \quad r \geq 0$$

ist.

Entsprechend ist mit $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Z})$ die Gleichung $\mathbf{R}^* \Phi = \varphi$ äquivalent zu

$$(7.3) \quad c_n \int_0^r \Phi(t) \frac{1}{r^{n-2}} (r^2 - t^2)^{(n-3)/2} dt = \varphi(r), \quad r \geq 0.$$

Die Konstante c_n hat den Wert $c_n = 2|S^{n-2}|$, wobei $|S^{n-2}|$ der Oberflächeninhalt der $(n-2)$ -Einheitssphäre ist.

(Es ist $|S^0| = 2$, $|S^1| = 2\pi$, $|S^2| = 4\pi$).

Beweis:

Sei $\theta \in S^{n-1}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^t$,

$$\theta_1 = \sin \alpha_{n-1} \dots \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 ,$$

$$\theta_2 = \sin \alpha_{n-1} \dots \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 ,$$

$$\theta_3 = \sin \alpha_{n-1} \dots \sin \alpha_3 \cos \alpha_2 ,$$

⋮

$$\theta_{n-1} = \sin \alpha_{n-1} \cos \alpha_{n-2} ,$$

$$\theta_n = \cos \alpha_{n-1}$$

mit $\alpha_i \in [0, \pi]$ für $i=2, \dots, n-1$ und $\alpha_1 \in [0, 2\pi)$.

$$i) \quad P^* \Phi(r) = \int_{S^{n-1}} \Phi(r \sqrt{1 - |\langle \omega, \theta \rangle|^2}) \, d\theta, \quad \text{da } \varphi \text{ und } \Phi \text{ rotationssymmetrisch}$$

vorausgesetzt wurden.

Ohne Einschränkung kann $\omega = (0, \dots, 0, 1)^t$ gewählt werden, da über S^{n-1} integriert wird. Es folgt:

$$\begin{aligned} P^* \Phi(r) &= \int_{S^{n-1}} \Phi(r \sqrt{1 - \theta_n^2}) \, d\theta = \\ &= \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi}}_{(n-2)} \Phi(r \sin \alpha_{n-1}) (\sin \alpha_{n-1})^{n-2} \dots (\sin \alpha_3)^2 \sin \alpha_2 \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{c_n}{2} \int_0^\pi \Phi(r \sin \alpha_{n-1}) (\sin \alpha_{n-1})^{n-2} \, d\alpha_{n-1} ,$$

$$c_n := 2 \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi}}_{(n-3)} d\alpha_1 \sin \alpha_2 \, d\alpha_2 \dots (\sin \alpha_{n-2})^{n-3} \, d\alpha_{n-2} = 2|S^{n-2}|$$

für $n \geq 3$. Die hier verwendete Parametrisierung der Sphäre S^{n-1} wird z.B. bei Natterer [34] VII.2 angegeben.

Falls $n = 2$, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\#} \Phi(r) &= \int_0^{2\pi} \Phi(r \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1}) d\alpha_1 = 2 \int_0^{\pi} \Phi(r \sin \alpha_1) d\alpha_1 \\ &= |S^0| \int_0^{\pi} \Phi(r \sin \alpha_1) d\alpha_1 . \end{aligned}$$

Man betrachtet nun das Integral

$$\int_0^{\pi} \Phi(r \sin \alpha) (\sin \alpha)^{n-2} d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \Phi(r \sin \alpha) (\sin \alpha)^{n-2} d\alpha .$$

Substitution von $t = r \sin \alpha$ liefert

$$\int_0^{\pi} \Phi(r \sin \alpha) (\sin \alpha)^{n-2} d\alpha = 2 \int_0^r \Phi(t) \frac{t^{n-2}}{r^{n-2}} (r^2 - t^2)^{-1/2} dt .$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \mathbb{R}^{\#} \Phi(x) &= \int_{S^{n-1}} \Phi(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta = \int_{S^{n-1}} \Phi(\langle x, \theta \rangle) d\theta \\ &= |S^{n-2}| \int_{-1}^1 \Phi(rt) (1 - t^2)^{(n-3)/2} dt , \end{aligned}$$

vgl. Natterer [34], Seite 188.

Da Φ gerade ist, folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\#} \Phi(r) &= 2|S^{n-2}| \int_0^1 \Phi(rt) (1 - t^2)^{(n-3)/2} dt = \\ &= 2|S^{n-2}| \int_0^r \Phi(u) \left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right)^{(n-3)/2} \frac{du}{r} = \quad (\text{Substitution } u = rt) \\ &= 2|S^{n-2}| \int_0^r \Phi(u) (r^2 - u^2)^{(n-3)/2} \frac{du}{r^{n-2}} . \end{aligned}$$

Mit $c_n := 2|S^{n-2}|$ erhält man die Behauptung. $\square$

Bemerkungen:

- a) Für $n = 2$ sind die Gleichungen (7.2) und (7.3) identisch.
 b) Für $n = 3$ haben die Gleichungen (7.2) und (7.3) die Form

$$(7.4) \quad \int_0^r \Phi(t) \frac{t}{r} (r^2 - t^2)^{-1/2} dt = \frac{1}{4\pi} \varphi(r)$$

$$(7.5) \quad \int_0^r \Phi(t) \frac{1}{r} dt = \frac{1}{4\pi} \varphi(r)$$

c) Die Gleichung (7.2) (für $n = 2$ auch (7.3)) ist eine verallgemeinerte Abelsche Integralgleichung.

d) Falls φ unstetig ist, hat (7.5) keine Lösung.

Insbesondere hat die Gleichung $\mathbb{R}^{\#} \Phi = \varphi$ für $n = 3$ und $\varphi = c \chi_{K_3(0,1)}$

mit einer Konstanten $c > 0$ keine rotationssymmetrische Lösung.

Dies entspricht einem Ergebnis von Nievergelt [37], der eine Lösung im Raum der Distributionen angibt, die nicht regulär ist.

Beweis: Angenommen es gebe eine Lösung $\Phi \in L^1_{loc}(T)$. Dann ist

$$\int_0^r \Phi(t) dt \quad \text{eine stetige Funktion;}$$

Nach (7.5) ist $\int_0^r \Phi(t) dt = \frac{r}{4\pi} \varphi(r)$ stetig im Widerspruch zur

Unstetigkeit von φ . □

Der nächste Satz ermöglicht das Lösen der Gleichung (7.2). Wir verwenden den Begriff der *absolut stetigen Funktion*. Falls $f \in L^1_{loc}(I)$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ fast überall im gewöhnlichen Sinne differenzierbar ist, die Ableitung $f' \in L^1_{loc}(I)$ und

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad \text{für alle } a, b \in I, \quad a < b,$$

so heißt f *lokal absolut stetig* (vgl. Royden [40], Chap.5, Sec.4 oder Rudin [41], 8.15).

(7.6) **Satz.**

i) Unter den Voraussetzungen von Satz (7.1) ist die Gleichung (7.2) fast überall auf $(0, \infty)$ genau dann erfüllt, wenn gilt

$$(7.7) \quad \frac{\pi}{2} \int_0^p \Phi(t) t^{n-2} dt = \frac{1}{c_n} \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr$$

Seien insbesondere φ und Φ stückweise stetig, dann gilt:

Die Lösung Φ der Gleichung (7.7) erfüllt die Gleichung (7.2) an allen Stetigkeitsstellen von φ und Φ .

ii) Sei $F(p) := \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr$

lokal absolut stetig. Dann ist

$$(7.8) \quad \Phi(p) := \frac{2}{c_n \pi p^{n-2}} \frac{d}{dp} F(p)$$

Lösung von (7.2) und damit von $P^* \Phi = \varphi$ fast überall.

(Die Differentiation von F ist als schwache Ableitung zu verstehen.)

Beweis:

i) " $\Rightarrow$ " Man multipliziert beide Seiten von (7.2) mit $r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} / c_n$ und integriert nach r von 0 bis p ($p \geq 0$).

Die linke Seite ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & \int_0^p \int_0^r \Phi(t) \frac{t^{n-2}}{r^{n-2}} (r^2 - t^2)^{-1/2} (p^2 - r^2)^{-1/2} r^{n-1} dt dr = \\ & = \int_0^p \Phi(t) t^{n-2} \int_t^p r (r^2 - t^2)^{-1/2} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr dt. \end{aligned}$$

Durch die Substitution $u = \frac{t^2 + p^2 - 2r^2}{t^2 - p^2}$, $u' = \frac{4r}{p^2 - t^2}$

kann das innere Integral berechnet werden:

$$\int_t^p r (r^2 - t^2)^{-1/2} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{p^2 - t^2}{4} (1-u^2)^{-1/2} \left(\frac{p^2 - t^2}{2}\right)^{-1} du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{-1/2} du = \frac{\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich die Beziehung (7.7).

"<" Setze

$$y(r) := c_n \int_0^r \Phi(t) (t/r)^{n-2} (r^2 - t^2)^{-1/2} dt - \varphi(r).$$

Multipliziert man beide Seiten mit $r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} / c_n$ und integriert nach r von 0 bis p ($p \geq 0$), so folgt wegen (7.7)

$$\int_0^p y(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = 0.$$

Nun wird y_1 definiert als $y_1(r) := y(r) r^{n-1}$.

Multiplikation mit $p(u^2 - p^2)^{-1/2} / c_n$ und Integration nach p von 0 bis u liefert:

$$c \int_0^u y_1(r) dr = 0 \quad \text{mit einer Konstanten } c \neq 0.$$

Also gilt $\int_0^u y_1(r) dr = 0$ für alle $u > 0$ und damit

$y_1(r) = 0$ und $y(r) = 0$ für $r \in (0, \infty)$ fast überall.

Falls s Stetigkeitsstelle ist, gibt es $r_1 < r_2$ mit $s \in (r_1, r_2)$ und y_1 ist

stetig auf (r_1, r_2) . Wegen $\int_0^u y_1(r) dr = 0$ für alle $u > 0$, also auch

$$\int_{r_1}^u y_1(r) dr = 0 \quad \text{folgt } y_1(r) = 0 \text{ auf } (r_1, r_2) \text{ und damit } y_1(s) = 0.$$

ii) Folgt aus (7.7) durch schwache Differentiation.

□

Bemerkungen:

a) Mit Hilfe von Satz (7.6) kann also die Gleichung $\mathbf{P}^{\#} \Phi = \varphi$ im rotations-symmetrischen Fall explizit gelöst werden; sie hat eine eindeutige radiale Lösung. Speziell für $n = 3$, φ_{ε} wie in I Satz (3.3) kann die Funktion $F(p)$ explizit ausgerechnet werden (siehe nächster Abschnitt). F ist stetig und stückweise differenzierbar, also absolut stetig. Durch schwaches Differenzieren erhält man den Faltungskern Φ_{ε} aus I Satz (3.3). Analog erhält man für $n = 2$ den Kern von Cho und Nievergelt aus Satz (3.4).

b) Der Beweis von Satz (7.6) folgt der Lösungsmethode für die verallgemeinerte Abelsche Integralgleichung aus Fenyő und Stolle [11] 13.2.3 und Seite 305, und zwar unter abgeschwächten Glattheitsforderungen an die Funktion φ . Damit verallgemeinert die Beziehung (7.8) die Lösungsformel aus Fenyő [11] durch Zulassen der schwachen Ableitung. Der Kern entsprechend dem Filter von Cho und Nievergelt aus Kapitel I, Satz (3.3) und (3.4) läßt sich nur mit der allgemeineren Formel (7.8) bestimmen, da φ in diesem Fall nicht stetig ist.

Ein weiterer Zugang zur Behandlung der verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung ist über die Laplace-Transformation möglich, vgl. Davies [8] §5.

c) Die Beziehungen aus Satz (7.1) können als weiteres Beispiel für den Zusammenhang von Radon-Gleichungen und Abelschen Integralgleichungen betrachtet werden. In diesem Fall sind es die dualen Gleichungen, die im rotationssymmetrischen Fall auf verallgemeinerte Abelsche Gleichungen führen. Betrachtet man die übliche Radon-Gleichung $\mathbf{R}f = g$ mit radialem f , so läßt sich für f eine verallgemeinerte Abelsche Integralgleichung herleiten (Natterer [34] II.2 (5), Seite 22). Auch bei der Cormackschen Methode für die Inversion der Radon-Transformation treten Abelsche Gleichungen auf, und zwar für die Fourier-Koeffizienten der gesuchten Funktion (Natterer [34] II.2, Theorem 2.3).

8. Eigenschaften und Beispiele von rotationssymmetrischen Faltungskernen

Unter zusätzlichen Glattheitsvoraussetzungen an φ läßt sich die Darstellung für die rotationssymmetrische Lösung Φ der Gleichung $\mathbf{P}^* \Phi = \varphi$ weiter umformen, so daß Eigenschaften von Φ direkt abgeleitet werden können. Insbesondere lassen sich Formeln gewinnen, die für die praktische Berechnung von Φ vorteilhaft sind.

(8.1) Satz.

Sei $n \geq 2$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ radial und stückweise differenzierbar, φ' integrierbar, $\varphi \geq 0$ und $\text{supp } \varphi \subset K_n(0, \varepsilon)$.

Die rotationssymmetrische Lösung der Gleichung $\mathbf{P}^* \Phi = \varphi$ bzw. (7.2) hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{i) } \Phi(p) &= \frac{2}{\pi c_n} \left((n-1) \int_0^{\pi/2} \varphi(p \sin \alpha) \sin^{n-1} \alpha \, d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + p \int_0^{\pi/2} \varphi'(p \sin \alpha) \sin^n \alpha \, d\alpha \right). \end{aligned}$$

ii) Φ ist stetig und es gilt

$$\Phi(0) = \frac{2(n-1)}{\pi c_n} \varphi(0) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} \alpha \, d\alpha.$$

iii) $\Phi(p) < 0$ für $p > \varepsilon$ und

$$\Phi'(p) > 0 \quad \text{für } p > \varepsilon.$$

iv) $\Phi(p) \longrightarrow 0$ für $p \longrightarrow \infty$ und

$$\Phi'(p) \longrightarrow 0 \quad \text{für } p \longrightarrow \infty.$$

v) $\varphi \in L^1(T)$ und $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(|y|) \, dy = 0$.

Beweis:

i) Wir gehen von der Darstellung von $F(p)$ aus Satz (7.6) ii) aus:

$$F(p) = \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr.$$

Die Substitution $r = p \sin \alpha$ ergibt

$$F(p) = \int_0^{\pi/2} \varphi(p \sin \alpha) p^{n-1} \sin^{n-1} \alpha d\alpha.$$

Mit (7.8) erhält man

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{2}{\pi c_n p^{n-2}} \left((n-1) p^{n-2} \int_0^{\pi/2} \varphi(p \sin \alpha) \sin^{n-1} \alpha d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + p^{n-1} \int_0^{\pi/2} \varphi'(p \sin \alpha) \sin^n \alpha d\alpha \right) = \\ &= \frac{2}{\pi c_n} \left((n-1) \int_0^{\pi/2} \varphi(p \sin \alpha) \sin^{n-1} \alpha d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + p \int_0^{\pi/2} \varphi'(p \sin \alpha) \sin^n \alpha d\alpha \right). \end{aligned}$$

ii) Folgt direkt aus i).

iii) Für $p > \varepsilon$ läßt sich wegen $\varphi(r) = 0$ für $r > \varepsilon$ schreiben

$$F(p) = \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr.$$

$$\frac{dF}{dp}(p) = \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^{n-1} (-p)(p^2 - r^2)^{-3/2} dr.$$

Man erhält

$$\Phi(p) = \frac{-2}{\pi c_n p^{n-3}} \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-3/2} dr \quad (*)$$

und damit $\Phi(p) < 0$ für $p > \varepsilon$.

Um $\Phi'(p)$ für $p > \varepsilon$ zu untersuchen, berechnen wir zuerst

$$\frac{d}{dp} \frac{1}{p^{n-3} (p^2 - r^2)^{3/2}} = \frac{(3-n) p^{3-n-1}}{(p^2 - r^2)^{3/2}} - \frac{3 p^{3-n+1}}{(p^2 - r^2)^{5/2}} = \frac{-3r^2 - n(p^2 - r^2)}{p^{n-2} (p^2 - r^2)^{5/2}}$$

und erhalten

$$\Phi'(p) = - \frac{2}{\pi c_n} \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^{n-1} \frac{-3r^2 - n(p^2 - r^2)}{p^{n-2} (p^2 - r^2)^{5/2}} dr, \quad (**)$$

also $\Phi'(p) > 0$ für $p > \varepsilon$

iv) Für $p > \varepsilon$ ergibt sich aus (*) mittels $0 \leq r \leq \varepsilon$:

$$p^2 - r^2 \geq p^2 - \varepsilon^2 \quad \text{und damit}$$

$$|\Phi(p)| \leq \frac{2}{\pi c_n p^{n-3} (p^2 - \varepsilon^2)^{3/2}} \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^{n-1} dr \longrightarrow 0 \quad \text{für } p \longrightarrow \infty$$

Entsprechend erhält man mit (**)

$$\begin{aligned} |\Phi'(p)| \leq \frac{2}{\pi c_n p^{n-2}} & \left(\frac{1}{(p^2 - \varepsilon^2)^{5/2}} \int_0^\varepsilon 3\varphi(r) r^{n+1} dr + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(p^2 - \varepsilon^2)^{3/2}} \int_0^\varepsilon n\varphi(r) r^{n-1} dr \right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für $p \longrightarrow \infty$.

v) Es gilt nach (7.7)

$$\int_0^p \varphi(r) r^{n-2} dr = c \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr,$$

mit $c := \frac{2}{\pi c_n}$.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \Phi(r) r^{n-2} dr = c \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr.$$

Für $p > \varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr &= \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr \leq \\ &\leq (p^2 - \varepsilon^2)^{-1/2} \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^{n-1} dr \longrightarrow 0 \quad \text{für } p \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also erhält man $\int_0^\infty r^{n-2} \Phi(r) dr = 0$ als uneigentliches Riemann-Integral.

$\int_0^\varepsilon r^{n-2} \Phi(r) dr$ ist endlich.

$\int_\varepsilon^\infty r^{n-2} \Phi(r) dr$ ist endlich als uneigentliches Riemann-Integral, und da

Φ auf (ε, ∞) das Vorzeichen nicht ändert (siehe iii)) folgt, daß

$\int_\varepsilon^\infty r^{n-2} \Phi(r) dr$ als Lebesgue-Integral existiert;

insbesondere ist

$$\int_0^\infty r^{n-2} |\Phi(r)| dr < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^\infty r^{n-2} \Phi(r) dr = 0$$

(als Lebesgue-Integrale).

Nun folgen die Aussagen aus v) durch Einführung von Polarkoordinaten:

in $\theta^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(|y|) \, dy = \int_{S^{n-2}} \int_0^\infty r^{n-2} \Phi(r) \, dr \, d\theta = 0,$$

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} |\Phi(|y|)| \, dy \, d\theta = |S^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\Phi(|y|)| \, dy = \\ &= |S^{n-1}| \int_{S^{n-2}} \int_0^\infty r^{n-2} |\Phi(r)| \, dr \, d\theta = |S^{n-1}| |S^{n-2}| \int_0^\infty r^{n-2} |\Phi(r)| \, dr < \infty. \end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

a) Die Anwendung von Satz (8.1) auf Faltungskerne Φ_ε zu einer Approximation der Eins mit kompaktem Träger φ_ε zeigt das qualitative Verhalten der Funktionen Φ_ε . In der Umgebung von Null verhält sich Φ_ε ähnlich wie φ_ε ; für $\varepsilon \rightarrow 0$ wächst Φ_ε gegen ∞ , da bis auf die multiplikative Konstante der Wert $\varphi_\varepsilon(0)$ angenommen wird. Im Intervall (ε, ∞) ist Φ_ε negativ und wächst asymptotisch gegen Null.

b) Die Eigenschaft v) zeigt, daß für die nach Abschnitt 7 bestimmten Faltungskerne zu φ_ε mit kompaktem Träger der Faltungsalgorithmus eine Regularisierung für die entsprechenden schlecht gestellten Radon-Gleichungen ist (vgl. Kapitel II, (5.1) i).

Zum expliziten Berechnen von Φ als radiale Lösung von $P^* \Phi = \varphi$ sind die folgenden Formeln nützlich.

(8.2) Satz.

Sei $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ rotationssymmetrisch, stückweise stetig differenzierbar, $\varphi \geq 0$, φ' beschränkt und sei $n \geq 3$.

Dann gilt für die rotationssymmetrische Lösung Φ der Gleichung $P^* \Phi = \varphi$:

$$i) \quad \Phi(p) = \frac{2}{\pi c_n p^{n-3}} \int_0^p (\varphi'(r) r^{n-2} + \varphi(r) (n-2) r^{n-3}) (p^2 - r^2)^{-1/2} \, dr$$

$$ii) \quad \Phi(p) = \frac{2}{\pi c_n} \int_0^{\pi/2} (p \varphi'(p \sin \alpha) \sin^{n-2} \alpha + (n-2) \varphi(p \sin \alpha) \sin^{n-3} \alpha) \, d\alpha.$$

Beweis:

i) Partielle Integration von $F(p) = \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr =$

$$= \int_0^p (\varphi(r) r^{n-2}) (r(p^2 - r^2)^{-1/2}) dr \quad \text{liefert}$$

$$F(p) = \int_0^p (\varphi'(r) r^{n-2} + \varphi(r) (n-2) r^{n-3}) (p^2 - r^2)^{1/2} dr.$$

$$\frac{dF}{dp}(p) = \int_0^p (\varphi'(r) r^{n-2} + \varphi(r) (n-2) r^{n-3}) p (p^2 - r^2)^{-1/2} dr,$$

woraus i) mit Hilfe von (7.8) folgt.

ii) Ergibt sich aus i) durch Substitution $r = p \sin \alpha$. □

Mit Hilfe von Satz (7.6) beziehungsweise (8.1) und (8.2) können rotationsymmetrische Faltungskerne explizit berechnet werden; im Zusammenhang mit der praktischen Anwendung des Faltungsalgorithmus werden sie meist *Filter* genannt. Wir berechnen zuerst das Filter aus Kapitel I, Satz (3.3), welches das dreidimensionale Analogon zum Kern von Cho (Satz (3.4) bzw. Nievergelt [36]) darstellt. Anschließend folgen Beispiele, die im Hinblick auf numerische Anwendungen bestimmt werden.

(8.3) Beispiele für Filter zum Operator $\mathbf{P}$, $n = 3$.

Für alle folgenden Beispiele gilt: $\varphi, \varphi_\varepsilon$ ist Approximation der Eins, $\varphi \geq 0$, $\|\varphi\|_1 = 1$, außerdem haben $\varphi, \varphi_\varepsilon$ kompakten Träger. Die Lösung der dualen Gleichung $\mathbf{P}^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ liefert einen Kern $\Phi_\varepsilon \in L^1(T)$ (nach (8.1) v) für den dreidimensionalen Faltungsalgorithmus. Die Filter 1 und 2 sind stetig, also $\Phi_\varepsilon \in L^2_{loc}(T)$, und der Faltungsalgorithmus ist nach (5.1) eine Regularisierung.

a) Filter 0

Sei $\varphi(x) = \varphi(r) = \chi_{[0,1]}$ mit $c := 4\pi/3$, $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-3}\varphi(x/\varepsilon)$.

Die Formeln aus Satz (7.6) liefern:

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{2\pi^2 p} \frac{d}{dp} \int_0^p \varphi_\varepsilon(r) r^2 (p^2 - r^2)^{-1/2} dr.$$

Wir berechnen zuerst

$$F(p) = \int_0^p \varphi_\varepsilon(r) r^2 (p^2 - r^2)^{-1/2} dr.$$

Für $p \leq \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{c\varepsilon^3} \int_0^p r^2 (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = \frac{1}{c\varepsilon^3} \left[-\frac{r}{2} \sqrt{p^2 - r^2} + \frac{p^2}{2} \arcsin \frac{r}{p} \right]_0^p \\ &= \frac{1}{c\varepsilon^3} p^2 \pi/4 = \frac{\pi}{4c\varepsilon^3} p^2, \end{aligned}$$

wobei Formel 166 aus Bronstein [5] verwendet wurde.

Für $p > \varepsilon$ erhält man

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{c\varepsilon^3} \int_0^\varepsilon r^2 (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = \frac{1}{c\varepsilon^3} \left[-\frac{r}{2} \sqrt{p^2 - r^2} + \frac{p^2}{2} \arcsin \frac{r}{p} \right]_0^\varepsilon \\ &= \frac{1}{c\varepsilon^3} \left[-\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{p^2 - \varepsilon^2} + \frac{p^2}{2} \arcsin \frac{\varepsilon}{p} \right]. \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \varepsilon \\ p > \varepsilon}} F(p) = \frac{\pi}{4c\varepsilon^3} p^2.$$

F ist also für $p > 0$ stetig und stückweise stetig differenzierbar, also absolut stetig. Differenzieren liefert

$$\Phi_\varepsilon(p) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi c \varepsilon^3}, & 0 \leq p \leq \varepsilon \\ \frac{1}{2\pi^2 c \varepsilon^3} \left[\arcsin \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} \right], & p > \varepsilon \end{cases}.$$

Dieses Filter hat einige Eigenschaften aus Satz (8.1), wie z.B. das Verhalten in 0 oder in (ϵ, ∞) . Andererseits ist Φ_ϵ nicht stetig und hat in ϵ sogar eine Singularität, was diese Funktion für praktische Anwendungen problematisch macht.

b) Filter 1

Wir wählen $\varphi(r) = \chi_{[0,1]} 3(1-r)/\pi$, $\varphi_\epsilon(r) = \chi_{[0,\epsilon]} \frac{3}{\pi \epsilon^3} (1-r/\epsilon)$.

Mit Hilfe der Formel i) aus Satz (8.2) findet man für $p \leq \epsilon$

$$\begin{aligned} & \int_0^p (\varphi'_\epsilon(r) r + \varphi_\epsilon(r)) (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^p \left(-r/\epsilon^4 + (1-r/\epsilon)/\epsilon^3 \right) (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = \\ &= \frac{3}{\pi} \left(\int_0^p -2r (p^2 - r^2)^{-1/2} \epsilon^{-4} dr + \int_0^p (p^2 - r^2)^{-1/2} \epsilon^{-3} dr \right) \\ &= -\frac{6}{\pi \epsilon^4} \left[-\sqrt{p^2 - r^2} \right]_0^p + \frac{3}{\pi \epsilon^3} \arcsin(r/p) \Big|_0^p = \frac{3}{2 \epsilon^3} - \frac{6}{\pi \epsilon^4} p. \end{aligned}$$

Für $p > \epsilon$ erhält man

$$\begin{aligned} & \int_0^\epsilon (\varphi'_\epsilon(r) r + \varphi_\epsilon(r)) (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = \\ &= -\frac{6}{\pi \epsilon^4} \left[-\sqrt{p^2 - \epsilon^2} + p \right] + \frac{3}{\pi \epsilon^3} \arcsin(\epsilon/p). \end{aligned}$$

Zusammenfassend folgt

$$\Phi_\epsilon(p) = \begin{cases} \frac{3(\pi\epsilon - 4p)}{4\pi^3 \epsilon^4} & , \quad 0 \leq p \leq \epsilon \\ \frac{3}{2\pi^3 \epsilon^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \arcsin(\epsilon/p) - \frac{2}{(p^2 - \epsilon^2)^{1/2} + p} \right) & , \quad p > \epsilon \end{cases}.$$

Man erkennt, daß Φ_ϵ stetig ist und auch sonst die Eigenschaften aus Satz (8.1) erfüllt. Bei numerischen Beispielen für den Faltungsalgorithmus hat sich dieses Filter besonders bewährt.

c) Filter 2

Zu $\varphi_{\varepsilon}(r) := \frac{1}{c\varepsilon^3} \chi_{[0,\varepsilon]}(1 - r^2/\varepsilon^2)$ mit $c := 8\pi/15$ findet man mit

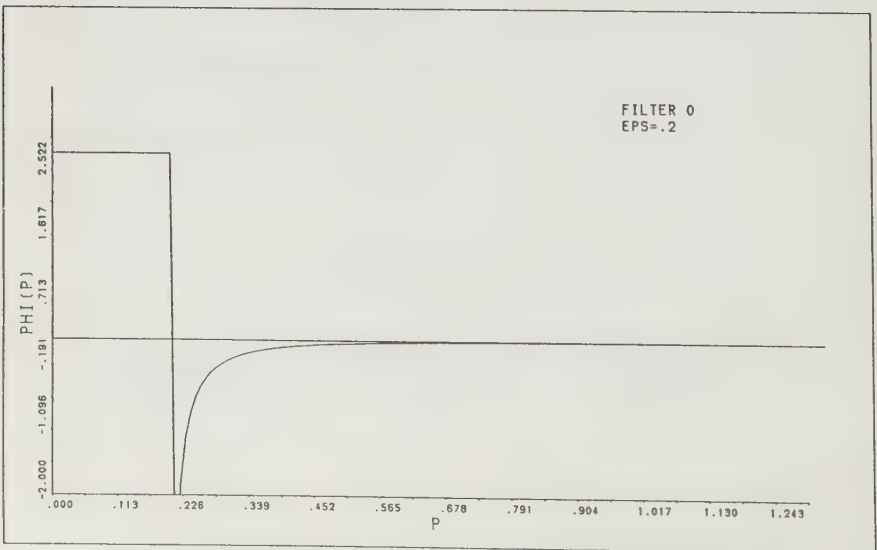
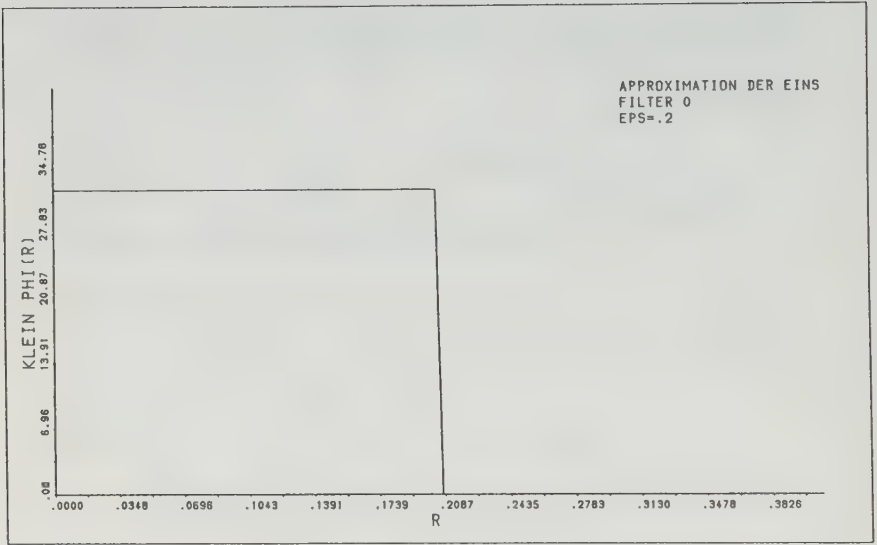
Hilfe von Satz (8.2) i)

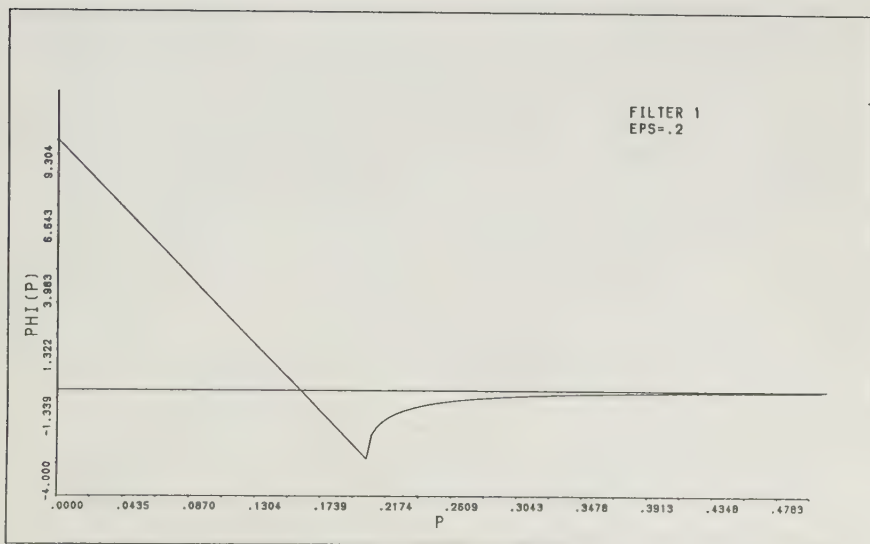
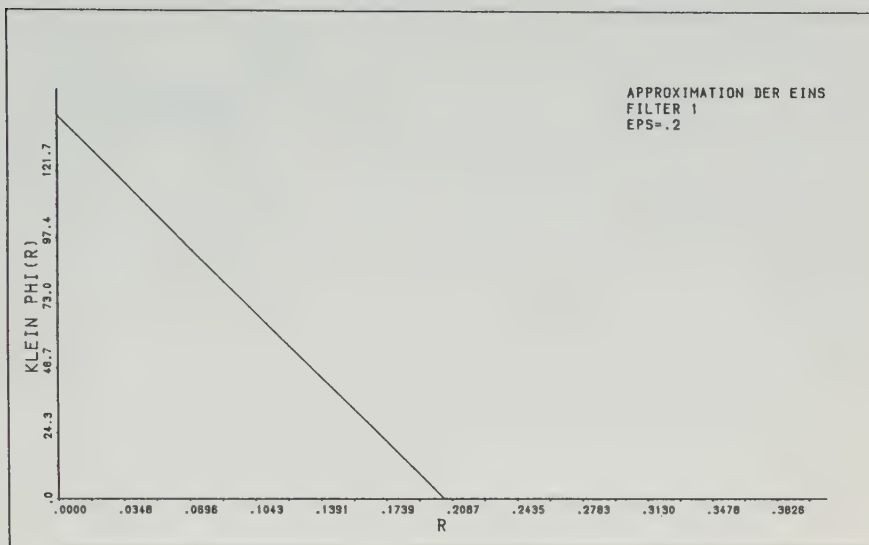
$$\Phi_{\varepsilon}(p) = \frac{4}{15\pi\varepsilon^3} \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{3}{2\varepsilon^2} p^2\right) & , \quad 0 \leq p \leq \varepsilon \\ \left(1 - \frac{3}{2\varepsilon^2} p^2\right) \arcsin(\varepsilon/p) + \frac{3}{2\varepsilon} (p^2 - \varepsilon^2)^{1/2} & , \quad p > \varepsilon \end{cases}$$

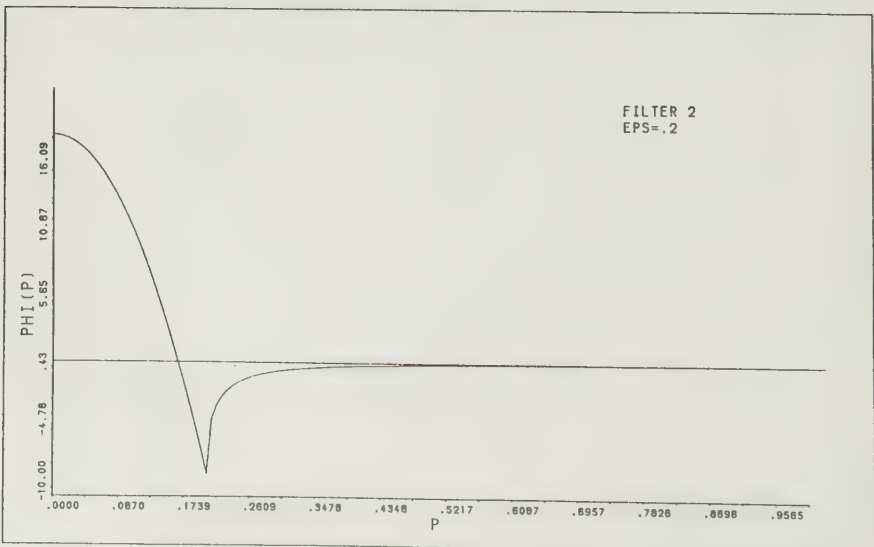
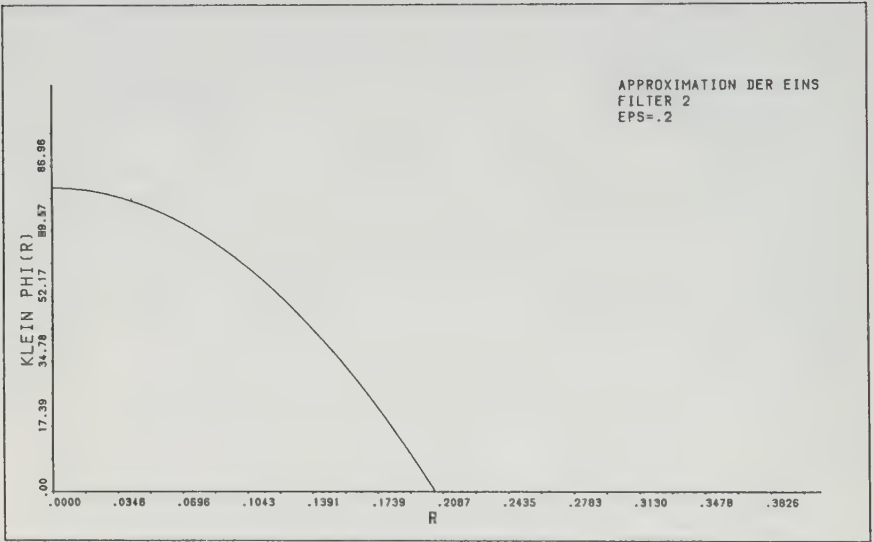
d) Filter 3

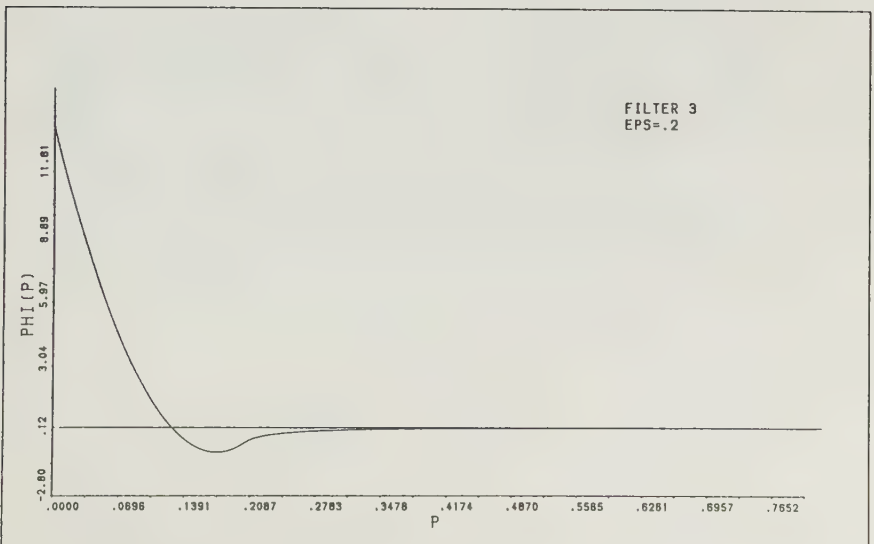
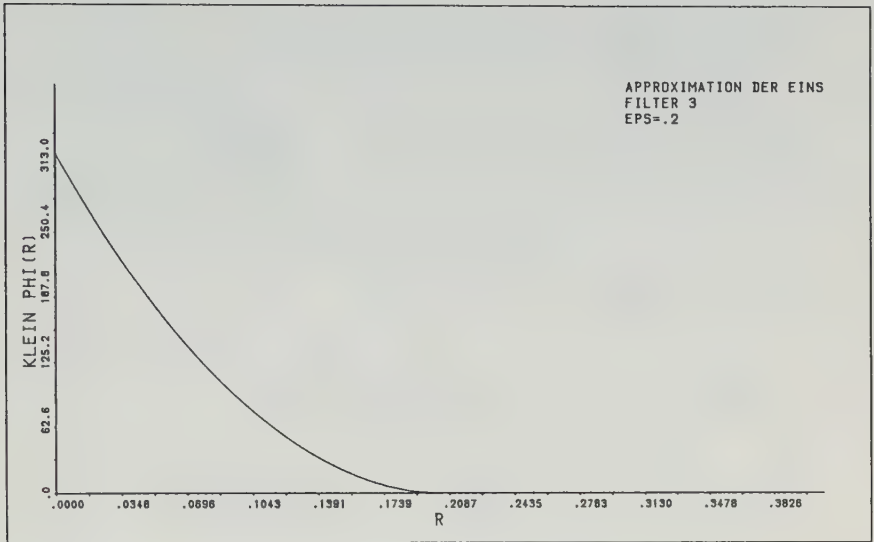
Mit $\varphi_{\varepsilon}(r) := \frac{1}{c\varepsilon^3} \chi_{[0,\varepsilon]}(1 - r/\varepsilon)^2$, $c := 2\pi/15$ erhält man

$$\Phi_{\varepsilon}(p) = \frac{1}{5\pi\varepsilon^3} \begin{cases} \frac{3\pi}{4\varepsilon^2} p^2 - \frac{4}{\varepsilon} p + \frac{\pi}{2} & , \quad 0 \leq p \leq \varepsilon \\ \left(1 + \frac{3}{2\varepsilon^2} p^2\right) \arcsin(\varepsilon/p) + \frac{5}{2\varepsilon} (p^2 - \varepsilon^2)^{1/2} - \frac{4p}{\varepsilon} & , \quad p > \varepsilon \end{cases}$$









(8.4) Gauß-Filter

Sei $\varphi_\varepsilon(r) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \varepsilon^n} \exp(-\frac{r^2}{2\varepsilon^2})$ ("Gauß-Glocke").

Für φ_ε gilt $\varphi_\varepsilon > 0$, $\|\varphi_\varepsilon\|_1 = 1$ und $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

i) Eine rotationssymmetrische Lösung der Gleichung

$\mathbb{P}^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, $n = 3$, kann mit Hilfe von Satz (8.2) gefunden werden.

$$\varphi'_\varepsilon(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon^3} \exp(-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}) \left(-\frac{r}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(p) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^p \left(\varphi'_\varepsilon(r) r + \varphi_\varepsilon(r) \right) (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 (2\pi)^{3/2} \varepsilon^3} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{p^2 \sin^2 \alpha}{\varepsilon^2} \right) \exp\left(-\frac{p^2 \sin^2 \alpha}{2\varepsilon^2}\right) d\alpha. \end{aligned}$$

Für praktische Berechnungen kann $\Phi_\varepsilon(p)$ an festen Stellen für ein gewähltes $\varepsilon > 0$ mit einer Quadraturformel näherungsweise bestimmt werden. Setzt man die Potenzreihe für die Exponentialfunktion ein, so findet man mit der Abkürzung $\lambda := (2\pi)^{-3/2} \varepsilon^{-3}$

$$\varphi_\varepsilon(r) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}\right)^k$$

$$\varphi'_\varepsilon(r) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-kr}{\varepsilon^2 k!} \left(-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}\right)^{k-1}$$

$$\varphi'_\varepsilon(r) r + \varphi_\varepsilon(r) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} \left(-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}\right)^k$$

$$\int_0^p r^{2k} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr = \int_0^{\pi/2} p^{2k} \sin^{2k} \alpha d\alpha = p^{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

nach Gradshteyn [14] , 3.621, wobei

$$(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)$$

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k) \quad .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{1}{2\pi^2} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} \left(-\frac{p^2}{2\varepsilon^2} \right)^k \cdot \frac{\pi}{2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \\ &= \frac{1}{4\pi (2\pi)^{3/2} \varepsilon^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!! k!} \left(-\frac{p^2}{2\varepsilon^2} \right)^k . \end{aligned}$$

Diese Darstellung entspricht den Gauß-Kernen von Nievergelt [37] , 4, wo die entsprechenden Formeln für Kerne zum Operator $\mathbf{R}$ berechnet wurden.

ii) Für die Gleichung $\mathbf{R}^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, $n = 3$ erhält man aus (7.5)

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{4\pi} \left(\varphi_\varepsilon'(p) + r \varphi_\varepsilon'(p) \right) .$$

Analog zu i) ergibt sich für Φ_ε die Reihendarstellung

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{4\pi (2\pi)^{3/2} \varepsilon^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} \left(-\frac{p^2}{2\varepsilon^2} \right)^k .$$

Dies ist bis auf Normierung die Reihe, die Nievergelt in [37], Beispiel 4.3 angibt.

iii) Betrachtet man die Gleichung

$$\mathbf{P}^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \quad \text{für } n = 2 ,$$

so erhält man analog zu Satz (8.2) i) aus der Darstellung (7.8)

$$\begin{aligned}\Phi_{\varepsilon}(p) &= \frac{2}{\pi c_2} \left(p \int_0^p \varphi_{\varepsilon}'(r) (p^2 - r^2)^{-1/2} dr + \varphi_{\varepsilon}(0) \right) \\ &= \frac{2}{\pi c_2} \left(p \int_0^{\pi/2} \varphi_{\varepsilon}'(r \sin \alpha) d\alpha + \varphi_{\varepsilon}(0) \right) \quad (1)\end{aligned}$$

$$\varphi_{\varepsilon}'(r) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2kr}{k! 2\varepsilon^2} \left(-\frac{r^2}{2\varepsilon^2} \right)^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2kr}{k! 2\varepsilon^2} \left(-\frac{r^2}{2\varepsilon^2} \right)^{k-1}$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{1}{2\pi \varepsilon^2}.$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\varepsilon}(p) &= \frac{2}{\pi c_2} \left(\varphi_{\varepsilon}(0) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k!} \left(-\frac{p^2}{2\varepsilon^2} \right)^k \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1} \alpha d\alpha \right) \\ &= \lambda \frac{2}{\pi c_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} \left(-\frac{2p^2}{\varepsilon^2} \right)^k, \quad (2)\end{aligned}$$

wobei man beachtet, daß $\varphi_{\varepsilon}(0) = \lambda$ und

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1} \alpha d\alpha = \frac{(2k-2)(2k-4) \dots 2}{(2k-1)(2k-3) \dots 3} \quad \text{ist.}$$

(vgl. Gradshteyn [14], 3.621).

Obige Reihendarstellung wurde von Nievergelt [37], Beispiel 4.2 mit Hilfe der Radon-Inversionsformel bestimmt. Die Reihe ist alternierend und für die numerische Auswertung (für großes p) nicht geeignet. Deshalb wird in [37] eine Differentialgleichung 2. Ordnung hergeleitet und von Nievergelt vorgeschlagen, Φ_{ε} durch numerisches Lösen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung auszuwerten (und zwar mit dem Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren). Die Darstellung (1) bietet dagegen die einfache und numerisch stabile Möglichkeit, Φ_{ε} durch eine Quadraturformel auszuwerten.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die in Satz (7.1) und (7.6) entwickelte Methode die explizite Berechnung von rotationssymmetrischen Faltungskernen erlaubt; eine Vielzahl von Kernen kann sogar analytisch bestimmt werden, Satz (8.2) ii) ermöglicht die einfache numerische Auswertung mit Quadraturformeln.

Wir haben bei der Berechnung von Filtern dem dreidimensionalen Fall besondere Beachtung geschenkt, da hier die üblichen zweidimensionalen Methoden i. allg. versagen; grundsätzlich lassen sich mit (7.6) jedoch auch zweidimensionale Faltungskerne berechnen.

9. Kerne für die Fächerstrahlgeometrie

Bei Anwendungen der Radon-Gleichungen in der Computer-Tomographie wird in der Literatur das "Fächerstrahlmodell" bevorzugt, d.h. es wird die Gleichung $Df = g$ betrachtet. Fächerstrahlen sind für die technische Realisierung der Röntgen-Tomographie vorteilhaft.

Die divergente Strahlentransformation, d.h. der Operator D aus Kapitel I (1.1) c) wurde allgemein von Hamaker [16], Smith [44], [45] untersucht, und es wurden auch entsprechende Inversionsformeln hergeleitet. Für die übliche zweidimensionale Anwendung in der Computer-Tomographie wurden numerische Verfahren von Herman [18], [19] angegeben. Smith [44] hat allgemein im n -dimensionalen Fall ($n \geq 2$) einen Faltungsalgorithmus als Analogon für die Situation bei Parallelstrahlen hergeleitet. Die Ergebnisse stützen sich auf Inversionsformeln für den Operator D (Smith [44]), das explizite Berechnen von Faltungskernen führt zu ähnlichen Schwierigkeiten wie bei Parallelstrahlen.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt, inwiefern aus den Überlegungen der Abschnitte 3 und 7 für den Operator P (d.h. Parallelstrahlen) ein Faltungsalgorithmus für die divergente Strahlentransformation hergeleitet werden kann. Gestützt auf den engen Zusammenhang zwischen den Operatoren D und P ergibt sich, daß die entsprechenden Filter direkt aus den Faltungskernen für Parallelstrahlen bestimmt werden können.

Der Zusammenhang zwischen D und P wird im folgenden Hilfsatz deutlich.

(9.1) **Lemma.**

Sei $A := \partial K_n(0, R)$, $\Omega \subset K_n(0, R)$.

Für $f \in L^2_0(\Omega)$, $\theta \in S^{n-1}$, K Funktion auf $\theta^\perp$, mit $Pf(\theta, \cdot) \cdot K(\cdot) \in L^2(\theta^\perp)$ gilt

$$i) \quad Df(x, \theta) + Df(x, -\theta) = Pf(\theta, E_\theta x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$ii) \quad \int_{\theta^\perp} Pf(\theta, y) K(y) dy = \frac{1}{2R} \int_A |\langle a, \theta \rangle| (Df(a, \theta) + Df(a, -\theta)) K(E_\theta a) da.$$

Beweis:

i) Folgt unmittelbar aus der Definition von D und P .

ii) Sei $g \in L^2(\theta^\perp)$, M eine orthogonale $n \times n$ Matrix, die den Vektor $e := (0, \dots, 0, 1)^t$ auf θ dreht, d.h. $Me = \theta$.

$$\begin{aligned} \int_A |\langle a, \theta \rangle| g(E_\theta a)/R da &= \int_A |\langle M^{-1}a, e \rangle| g(ME_e M^{-1}a)/R da = \\ &= \int_A |\langle z, e \rangle| g(ME_e z)/R dz = \int_{A^+} \dots + \int_{A^-} \dots, \end{aligned}$$

wobei A^+ und A^- die obere bzw. untere Hälfte der Sphäre A darstellen.

$$\int_{A^+} |\langle z, e \rangle| g(ME_e z)/R dz = \int_{|\zeta| \leq R} |\langle z, e \rangle| g(ME_e z) (R^2 - |\zeta|^2)^{-1/2} d\zeta,$$

wobei $\zeta := (z_1, \dots, z_{n-1})^t$. Beachtet man, daß $|\langle z, e \rangle|^2 = R^2 - |\zeta|^2$, so folgt

$$= \int_{|\zeta| \leq R} g\left(M \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}\right) d\zeta = \int_{\theta^\perp} g(y) dy, \quad \text{falls } \text{supp } g \subset K_n(0, R).$$

$$\text{Analog } \int_{A^-} |\langle z, e \rangle| g(ME_e z)/R dz = \int_{\theta^\perp} g(y) dy.$$

Anwendung obiger Beziehung auf $g(y) := Pf(\theta, y) K(y)$ und i) liefert die Formel ii) (siehe auch Smith [45] 4.8).

□

Mit Hilfe von Lemma (9.1) läßt sich eine Methode angeben, eine Funktion f aus den Werten der divergenten Strahlentransformation Df zu berechnen. Dabei ist Df für Quellen auf einer Kugeloberfläche um das Gebiet Ω bekannt.

(9.2) **Satz.** (Faltungsalgorithmus für Fächerstrahlen)

Sei $\Omega \subset K_n(0, R)$, $R > 0$, $n \geq 2$ und $A := \partial K_n(0, R)$.

Sei $\varphi, \varphi_\varepsilon$ eine Approximation der Eins und $\Phi_\varepsilon \in L^1(T)$ Lösung der dualen Gleichung $P^* \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, sowie $f \in L^2_0(\Omega)$.

Dann gilt:

$$\frac{1}{2R} \int_{S^{n-1}} \int_A (Df(a, \theta) + Df(a, -\theta)) |\langle a, \theta \rangle| \Phi_\varepsilon(\theta, E_\theta x - E_\theta a) da d\theta \rightarrow f(x)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Aus Lemma (3.1) und (3.2) folgt

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} P f(\theta, y) \Phi_\varepsilon(\theta, E_\theta x - y) dy d\theta \rightarrow 0$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ersetzt man das innere Integral mit Hilfe der Formel (9.1) ii), so folgt die Behauptung. Man beachte dabei, daß der Integrand im inneren Integral als Faltung von $Pf(\theta, \cdot) \in L^2(\theta^\perp)$ und $\Phi_\varepsilon(\theta, \cdot) \in L^1(\theta^\perp)$ quadratintegrierbar ist für fast alle θ .

□

Die mit der Methode aus Abschnitt 7 berechneten Filter können also auch im Falle der Fächerstrahlgeometrie angewandt werden. Φ_ε ist dann rotationssymmetrisch und der Kern vereinfacht sich:

$$\Phi_\varepsilon(\theta, E_\theta(x-a)) = \Phi_\varepsilon(E_\theta(x-a)).$$

Obwohl in dem Ausdruck aus (9.2) keine Faltung, sondern nur ein faltungs-ähnlicher Ausdruck vorkommt, nennt man diese Inversionsmethode Faltungsalgorithmus (Smith [44], 4). Meist wird zur Auswertung die Reihenfolge der Integrationen vertauscht.

Mit der Abkürzung $L_a f(\theta) := Df(a, \theta) + Df(a, -\theta)$ und $x - a = r\xi$, $r = |x - a|$ berechnet man

$$\frac{1}{2R} \int_A \int_{S^{n-1}} L_a f(\theta) |\langle a, \theta \rangle| \Phi_\varepsilon(\theta, rE_\theta \xi) d\theta da$$

als Näherung für f .

Da man bei der praktischen Rechnung meist von einer groben Diskretisierung von A (relativ wenig Strahlenquellen) ausgeht, wurde von Smith [44] obige Formel vorgeschlagen. Wegen des Auftretens von r im Kern Φ_ε ist die Berechnung des inneren Integrals relativ aufwendig; in der Literatur wird deshalb empfohlen, $\Phi_\varepsilon(rE_\theta \xi)$ näherungsweise durch $\Phi_\varepsilon(E_\theta \xi) r^{-n}$ zu ersetzen.

Kapitel IV : Faltungskerne und Inversionsformeln

10. Die Inversionsformeln

Wie schon in Abschnitt 7 skizziert, kann die duale Gleichung $\mathbb{P}^* \Phi = \varphi$ mit Hilfe der bekannten Inversionsformeln (Smith [44]) behandelt werden. Die in Kapitel III entwickelte Methode für rotationssymmetrische Filter stellt einen anderen Lösungsweg zur Verfügung, der insbesondere für numerische Berechnungen vorteilhaft ist.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Zusammenhang zwischen diesen beiden Vorgehensweisen. Dazu werden zuerst die klassischen Inversionsformeln behandelt.

Wir bezeichnen mit

$$R_{\alpha}(x) := C(n, \alpha) |x|^{\alpha-n} \quad \text{für } x \neq 0, \quad C(n, \alpha) = \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^{\alpha} \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)}$$

den *Riesz-Kern der Ordnung* α , $0 < \alpha < n$; $R_{\alpha} * f$ heißt *Riesz-Potential*.

Zwischen dem Riesz-Potential und der Strahlentransformation gibt es folgenden Zusammenhang.

(10.1) **Lemma.**

Für f meßbar auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$C(n, 1) \int_{S^{n-1}} Df(x, \theta) \, d\theta = \frac{C(n, 1)}{2} \int_{S^{n-1}} Pf(\theta, E_{\theta}x) \, d\theta = R_1 * f(x),$$

falls $f \geq 0$ oder eine Seite in obiger Beziehung endlich ist, nachdem f durch $|f|$ ersetzt wurde.

Beweis: Die Aussage folgt aus Hamaker [16], Theorem 3.2, siehe auch Smith [46], Thm. 2.7 oder Natterer [34], I, Thm. 1.5. $\square$

Das folgende Ergebnis aus der Theorie des Riesz-Potentials ist wesentlich für die Herleitung von Inversionsformeln.

(10.2) **Lemma.**

Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$ und $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{\alpha-n} g(y) dy < \infty$.

Dann gilt für die Fourier-Transformierte des Riesz-Potentials

$$(\mathcal{R}_\alpha * g)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

falls wenigstens eine Seite in obiger Beziehung quadratintegrierbar ist.

Beweis: Smith, Solmon [47], Appendix A, Thm.1.

□

Bemerkung:

Falls $\alpha < n/2$ ist die Voraussetzung $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{\alpha-n} g(y) dy < \infty$

nach Cauchy-Schwarz erfüllt; ebenso für g mit kompaktem Träger.

(10.3) **Lemma.**

Sei $n > 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f \in L^2_0(\Omega)$, dann gilt:

$$\mathcal{R}_1 * f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:

Da Ω beschränkt ist, folgt $f \in L^1_0(\Omega)$. Man definiert

$$K(x) := |x|^{1-n} = \mathcal{R}_1(x) / C(n,1)$$

Sei $\mu > 0$ beliebig.

$$K_1(x) := \begin{cases} K(x) & \text{für } |x| \leq \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$K_\infty(x) := \begin{cases} K(x) & \text{für } |x| > \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $K = K_1 + K_\infty$, also auch $K*f = K_1*f + K_\infty*f$.

(1) Wegen $\int_{K_n(0,\mu)} |x|^{1-n} dx < \infty$ ist $K_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

außerdem ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, also gilt $K_1*f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(2) Wegen $\int_{|x|>\mu} |x|^{2(1-n)} dx = \int_\mu^\infty r^{2(1-n)} r^{n-1} |S^{n-1}| dr =$
 $= |S^{n-1}| \int_\mu^\infty r^{1-n} dr < \infty$ ist $K_\infty \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Insgesamt erhält man aus (1) und (2): $K*f = K_1*f + K_\infty*f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Der Calderon-Operator Λ wird definiert durch

$$(\Lambda f)^\wedge(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Funktionen aus dem Sobolevraum $H^1(\mathbb{R}^n)$ ist $|\xi| \hat{f}(\xi)$ quadratintegrierbar, also ist dies ein geeigneter Definitionsbereich für Λ . Da der Calderon-Operator invers zum Riesz-Potential der Ordnung 1 ist, kann man nun die folgenden Inversionsformeln gewinnen.

(10.4) **Satz.**

Sei $f \in L^2_0(\Omega)$ und R_1*f quadratintegrierbar.

Dann gilt

$$i) \quad f(x) = \frac{C(n,1)}{2} \Lambda P^* P f(x).$$

$$ii) \quad f(x) = \frac{C(n,1)}{2} \int_{S^{n-1}} \Lambda h_\theta(x) d\theta \quad \text{mit } h_\theta(x) := P f(\theta, E_\theta x).$$

Falls $f \in L^2_0(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$ und $n > 2$ gilt

$$iii) \quad f(x) = \frac{C(n,1)}{2} P^* \Lambda P f(x).$$

Der Operator Λ angewandt auf eine Funktion, die auf T definiert ist, wirkt bezüglich der zweiten Variablen.

Beweis:

i) Mit Lemma (10.2) folgt $\Lambda(R_1 * f) = f$ und mit (10.1) folgt die Beziehung i) (siehe auch Smith [44]).

ii) Setze $H(x) := \int_{S^{n-1}} h_{\theta}(x) d\theta = P^* P f(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Lambda H(y) &= F^{-1}(|\xi| F(H)(\xi))(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| e^{i\langle y, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} H(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| e^{i\langle y, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} h_{\theta}(x) d\theta e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx d\xi = \\ &= \int_{S^{n-1}} \Lambda h_{\theta}(y) d\theta \quad (\text{Fubini}). \end{aligned}$$

iii) Da $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, ist $|\xi| \hat{f}(\xi)$ quadratintegrierbar, und $F^{-1}(|\xi| \hat{f}(\xi)) = \Lambda f$ existiert in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit Hilfe von Lemma (6.2) i) erhält man für $\xi \in \theta^{\perp}$, $\theta \in S^{n-1}$

$$(\Lambda P_{\theta} f)^{\wedge}(\xi) = |\xi| (P_{\theta} f)^{\wedge}(\xi) = (2\pi)^{1/2} |\xi| \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{1/2} (\Lambda f)^{\wedge}(\xi) = (P_{\theta} \Lambda f)^{\wedge}(\xi).$$

Also gilt

$$\Lambda P_{\theta} f = P_{\theta} \Lambda f \quad (*)$$

Lemma (10.1) angewandt auf die Funktion Λf liefert

$$\frac{C(n,1)}{2} P^* P \Lambda f = R_1 * \Lambda f = f,$$

da Λ zum Riesz-Potential invers ist.

Mit der Beziehung (*) folgt nun

$$f = \frac{C(n,1)}{2} P^* P f$$

und damit iii). □

Bemerkung:

Falls $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, gilt i) und ii) (für $n \geq 2$).

Beweis: Natterer [34] II, Thm. 2.1, siehe auch Smith [46], II, (2.10). $\square$

Ähnliche Formeln lassen sich auch für die Radon-Transformation beweisen.

(10.5) Satz.

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt mit $h(x) := |x|^{-1}$

$$i) \quad \mathbf{R}^* \mathbf{R} f = |S^{n-2}| h * f.$$

$$ii) \quad f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \Lambda^{n-1} \mathbf{R}^* \mathbf{R} f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{R}^* \Lambda^{n-1} \mathbf{R} f(x).$$

Beweis:

i) Natterer [34] II, Thm. 1.5.

ii) Natterer [34] II, Thm. 2.1, bzw. Smith [44].

Dabei ist Λ^{n-1} die $(n-1)$ -malige Hintereinanderausführung von Λ und es gilt

$$(\Lambda^{n-1} f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{n-1} \hat{f}(\xi). \quad \square$$

Mit Hilfe der Inversionsformeln (10.4) i) und iii) hat Smith [44], [45], [46] Faltungsalgorithmen für die Operatoren $\mathbf{P}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{R}$ angegeben.

Sei φ_ε eine Approximation der Eins; man erhält durch Faltung beider Seiten der Inversionsformel mit φ_ε unter Berücksichtigung von

$$\mathbf{P}_\theta(f * \varphi_\varepsilon) = (\mathbf{P}_\theta f) * (\mathbf{P}_\theta \varphi_\varepsilon)$$

die Beziehung

$$f * \varphi_\varepsilon(x) = \int_{S^{n-1}} ((\mathbf{P}_\theta f) * k_\varepsilon)(E_\theta x) d\theta$$

mit $k_\varepsilon(y) = (C(n,1)/2) \Lambda \mathbf{P}_\theta \varphi_\varepsilon(y)$ (Smith [45], 6).

Für den Operator **D** erhält man mit Lemma (9.1) ii)

$$f * \varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2R} \int_{S^{n-1}} \int_A |\langle a, \theta \rangle| (Df(a, \theta) + Df(a, -\theta)) k_{\varepsilon}(E_{\theta}(x-a)) da d\theta.$$

Entsprechend gilt für die Radon-Transformation

$$f * \varphi_{\varepsilon}(x) = \int_{S^{n-1}} ((R_{\theta} f) * k_{\varepsilon})(\langle x, \theta \rangle) d\theta$$

mit $k_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \Lambda^{n-1} R_{\theta} \varphi_{\varepsilon}(t).$

Wir zeigen, daß mit radialer Approximation der Eins obige Faltungskerne für **P** dieselben sind, wie die im Kapitel III, 7 bestimmten.

(10.6) **Satz.**

Sei $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2_0(\Omega)$ mit $n > 2$ oder $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 2$, φ rotations-symmetrisch und $R_1 * \varphi$ quadratintegrierbar.

i) Die Funktion

$$k(y) := \frac{C(n,1)}{2} \wedge P_{\theta} \varphi(y), \quad y \in \theta^{\perp}, \quad \theta \in S^{n-1}$$

ist rotations-symmetrische Lösung der dualen Gleichung $P^* k = \varphi$ und erfüllt die Volterrasche Integralgleichung (7.2) fast überall.

ii) Falls

$$F(p) := \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr$$

lokal absolut stetig ist, gilt

$$\frac{C(n,1)}{2} \wedge P_{\theta} \varphi(y) = \frac{2}{c_n \pi p^{n-1}} \frac{d}{dp} F(p), \quad p = |y| \quad (\text{fast überall}).$$

Beweis:

i) Falls φ rotationssymmetrisch ist, so auch $P_0 \varphi(y)$, d.h.

$$P_{\theta_1} \varphi(y_1) = P_{\theta_2} \varphi(y_2) \quad \text{für } y_1 \in \theta_1^\perp, y_2 \in \theta_2^\perp \text{ und } |y_1| = |y_2|.$$

Da für rotationssymmetrische Funktionen die Anwendung des Operators Λ auch wieder eine rotationssymmetrische Funktion liefert (wegen der Definition über die Fourier-Transformation, (11.2)), folgt die Rotationssymmetrie für k . Das Erfülltsein der Gleichung $P^{\#} k = \varphi$ ergibt sich unmittelbar aus Satz (10.4) iii).

Da jede radiale Lösung der Gleichung $P^{\#} \Phi = \varphi$ auch der Volterraschen Integralgleichung (7.2) aus Kapitel III genügt, und diese eindeutig lösbar ist, folgt die Behauptung ii). $\square$

11. Fourier-Transformation von Faltungskernen

Während man eine Reihe von Eigenschaften der rotationssymmetrischen Faltungskerne relativ einfach beweisen kann (siehe III, (8.1)), läßt sich die Fourier-Transformierte eines Filters Φ_ε nicht so einfach bestimmen. Für die von Nievergelt gefundenen Gauß-Filter wird in [37], 4.10 die Fourier-Transformierte berechnet, und damit das Glättungsverhalten untersucht.

Der im vorigen Abschnitt gezeigte Zusammenhang zwischen den Inversionsformeln von Smith und radialen Kernen erlaubt es, mit wenig Aufwand ihre Fourier-Transformierten zu bestimmen, und zwar allgemein und nicht nur für Gauß-Filter.

(11.1) Lemma.

Die Fourier-Transformierte einer rotationssymmetrischen Funktion ist ebenfalls rotationssymmetrisch.

Beweis: Stein [52] , IV, 1.2

$\square$

(11.2) Folgerung.

Der Calderon-Operator Λ bildet eine rotationssymmetrische Funktion auf eine rotationssymmetrische ab.

Beweis: Folgt aus Lemma (11.1) unter Beachtung der Definition von Λ mit Hilfe der Fourier-Transformation. $\square$

(11.3) Satz.

Sei $\varphi \in L^2_0(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 2$ oder $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $n \geq 2$, φ rotationssymmetrisch und Φ rotationssymmetrische Lösung von $\mathbf{P}^* \Phi = \varphi$.

Dann ist die Fourier-Transformierte von Φ gegeben durch

$$\hat{\Phi}(\xi) = \frac{C(n,1)}{2} (2\pi)^{1/2} |\xi| \hat{\varphi}(\xi),$$

$\xi \in \theta^\perp$ mit $\theta \in S^{n-1}$ beliebig.

Beweis:

Nach Satz (10.6) ist

$$\Phi(y) = \frac{C(n,1)}{2} \Lambda \mathbf{P}_\theta \varphi(y), \quad y \in \theta^\perp,$$

woraus man mit dem Projektionssatz (6.2) ii) die Behauptung erhält:

$$\hat{\Phi}(\xi) = \frac{C(n,1)}{2} |\xi| (\mathbf{P}_\theta \varphi)^\wedge(\xi) = \frac{C(n,1)}{2} (2\pi)^{1/2} |\xi| \hat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \theta^\perp.$$

$\square$

Ein entsprechender Satz gilt auch für die Radon-Transformation $\mathbf{R}$.

(11.4) Satz.

Sei $\varphi \in \mathcal{S}$ rotationssymmetrisch und Φ rotationssymmetrische Lösung der Gleichung $\mathbf{R}^* \Phi = \varphi$.

Dann gilt für die Fourier-Transformierte von Φ :

$$\hat{\Phi}(\sigma) = \frac{(2\pi)^{(1-n)/2}}{2} |\sigma|^{n-1} \hat{\varphi}(\sigma\theta)$$

für beliebiges $\theta \in S^{n-1}$.

Beweis: Nach Satz (10.5) ii) gilt

$$\Phi(s) = \frac{(2\pi)^{(1-n)}}{2} \wedge^{n-1} R_{\theta} \varphi(s),$$

$$\hat{\Phi}(\sigma) = \frac{(2\pi)^{(1-n)}}{2} |\sigma|^{n-1} (R_{\theta} \varphi)^{\wedge}(\sigma\theta) = \frac{(2\pi)^{(1-n)/2}}{2} |\sigma|^{n-1} \hat{\varphi}(\sigma\theta),$$

wegen (6.2) i). $\square$

(11.5) Folgerung.

Sei $\varphi_{\varepsilon}(r) := (2\pi)^{-n/2} \varepsilon^{-n} \exp(-r^2/(2\varepsilon^2))$ (Gauß-Filter).

i) Für Φ_{ε} radial mit $R^* \Phi_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}$ gilt

$$\hat{\Phi}_{\varepsilon}(\sigma) = \lambda_n |\sigma|^{n-1} \exp(-\varepsilon^2 \sigma^2/2)$$

mit $\lambda_n = (2\pi)^{(1-2n)/2}/2$.

ii) Für Φ_{ε} radial mit $P^{\#} \Phi_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}$ gilt

$$\hat{\Phi}_{\varepsilon}(\xi) = \lambda_n |\xi| \exp(-\varepsilon^2 |\xi|^2/2)$$

mit $\lambda_n = C(n,1) \frac{1}{2(2\pi)^{(n-1)/2}}$

Beweis:

Es ist $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

i) Man beachtet, daß

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(\sigma) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\varepsilon^2 \sigma^2 / 2)$$

und wendet Satz (11.4) an.

ii) Folgt aus Satz (11.3). □

Mit Hilfe der Fourier-Transformation kann nun das Glättungsverhalten von Φ_ε analysiert werden. φ_ε wird normalerweise Tiefpaßeigenschaften haben, d.h. hochfrequente Anteile (abhängig von ε) eliminieren. Φ_ε hat dann nach (11.3), (11.4) dieselben Tiefpaßeigenschaften bezüglich hochfrequenter Anteile.

Im Faltungsalgorithmus wird nämlich $(Pf) * \Phi_\varepsilon$ berechnet und es gilt

$$((Pf) * \Phi_\varepsilon)^\wedge(\xi) = (Pf)^\wedge(\xi) \hat{\Phi}_\varepsilon(\xi) = c (Pf)^\wedge(\xi) |\xi| \hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)$$

mit einer geeigneten Konstanten c .

Hochfrequente Störungen in den Daten Pf werden also durch Φ_ε geglättet, wobei das Maß für die Glättung durch ε gesteuert wird (vgl. auch Nievergelt [37], 4.12). Wegen $\hat{\Phi}_\varepsilon(0) = 0$ kann aber genaugenommen Φ_ε nicht als Tiefpaßfilter bezeichnet werden.

Die nächste einfache Folgerung aus Satz (11.3) ist genau die Eigenschaft (8.1) v) aus Kapitel III.

(11.6) Folgerung.

Sei φ wie im Satz (11.3), Φ radial, $P^* \Phi = \varphi$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y) dy = 0.$$

Beweis:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y) dy = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{\Phi}(0) = 0$$

nach (11.3).

□

Wir ziehen nun aus Satz (10.6) und (11.3) eine weitere Folgerung, die die Lösung einer "Fourier-Gleichung" beinhaltet; bemerkenswert ist, daß die Formulierung der Aussage völlig unabhängig von dem Operator $\mathbf{P}$ ist.

(11.7) Folgerung.

Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rotationssymmetrisch.

Die rotationssymmetrische Funktion $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ definiert durch

$$\Phi(p) := \frac{4}{c_n \pi (2\pi)^{1/2} C(n,1) p^{n-1}} \frac{d}{dp} \int_0^p \varphi(r) r^{n-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} dr$$

löst die Gleichung

$$\hat{\Phi}(\xi) = |\xi| \hat{\varphi}(\xi, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Beweis: Satz (10.6) und (11.3)

□

Bemerkung:

In der Situation von (11.7) löst das angegebene Φ die Integralgleichung

$$a_{n-1} \int_0^\infty \Phi(s) s^{n-2} Q_{n-3}(|\xi|s) ds = a_n \int_0^\infty \varphi(s) s^{n-1} |\xi| Q_{n-2}(|\xi|s) ds,$$

$\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, mit

$$Q_\mu(x) := \frac{\Gamma((\mu+2)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma((\mu+1)/2)} \int_{-1}^1 \cos(|x|s) (1-s^2)^{(\mu-1)/2} ds$$

und $a_\mu := \frac{2}{2^{\mu/2} \Gamma(\mu/2)}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Man verwendet in (11.7) bei der Berechnung der Fourier-Transformation Polarkoordinaten (vgl. Leahy [22], (8.4)). $\square$

12. Eine Rekonstruktionsmethode von K. T. Smith

Im Zusammenhang mit dem Faltungsalgorithmus, wie er sich aus den Inversionsformeln ergibt, hat K. T. Smith folgende Rekonstruktionsmethode vorgeschlagen (siehe Smith [46], VII.B). Anstatt nur die unbekannte Dichtefunktion f als Lösung der Gleichung $Pf = g$ näherungsweise zu bestimmen, berechnet man zusätzlich eine Näherung für Δf . Eine Konvexkombination dieser beiden Näherungen liefert meist ein besseres Ergebnis; wenn man die Dichtefunktion als Grauwertbild auffaßt, erhält man in manchen Fällen (z.B. unvollständige Daten, insbesondere beschnittene Projektionen im Fall $n = 2$) schon allein aus der Näherung für Δf ein zufriedenstellendes Bild. Die Berechnung von Δf ist relativ einfach und auch über einen Faltungsalgorithmus durchführbar.

(12.1) Satz.

Sei $f \in \mathcal{S}$ und $\varphi \in \mathcal{S}$, dann gilt

$$i) \quad \Delta f = - \frac{C(n,1)}{2} \Delta P^* P f = - \frac{C(n,1)}{2} P^* \Delta P f .$$

$$ii) \quad \varphi * \Delta f = P^* (k * P f)$$

$$\text{mit } k = - \frac{C(n,1)}{2} \Delta P \varphi .$$

Dabei ist Δ der Laplace-Operator, der bei Funktionen auf T bezüglich des zweiten Argumentes wirkt.

Beweis:

Man verwendet die Inversionsformeln aus Satz (10.4) und beachtet die Eigenschaft des Calderon-Operators $\Lambda^2 = -\Delta$ (vgl. Smith [46], (5.6)). $\square$

Falls φ_ε Approximation der Eins ist, folgt

$$\varphi_\varepsilon * \Delta f \longrightarrow \Delta f \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

also ist für kleines ε durch $P_\varepsilon^*(k * P f)$ eine Näherung an Δf gegeben.

Für rotationssymmetrische φ , d.h. $\varphi(x) = \varphi(r)$ läßt sich die Berechnung des Kernes k noch vereinfachen, indem man für den Laplace-Operator die Beziehung

$$\Delta \varphi(r) = \varphi''(r) + \varphi'(r) \cdot \frac{2}{r}, \quad r = |x|$$

verwendet.

Im Fall $n = 2$ reduziert sich der Laplace-Operator auf die zweite Ableitung (vgl. Natterer [34], IV.4, (4.5)).

(12.2) **Satz.**

Sei $n = 2$, $Rf = g$, $f \in \mathcal{S}$ und Lf definiert durch

$$Lf(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{S^1} g''(\omega, \langle x, \omega \rangle) d\omega.$$

Die zweite Ableitung ist bezüglich des zweiten Argumentes von g zu bilden. Dann gilt:

$$(Lf)^\wedge(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi).$$

Beweis:

Die Aussage folgt direkt aus Satz (10.5) ii) zusammen mit $\Delta^2 = -\Delta$.

Wir führen zusätzlich einen elementaren Beweis, der lediglich den Projektionssatz (6.2) und einfache Eigenschaften der Fourier-Transformation verwendet. Eine Inversionsformel für die Radon-Transformation wird nicht benötigt. Der Gedankengang lehnt sich an Ludwig [28], Abschnitt 1 an.

Nach (6.2) gilt

$$\hat{f}(\rho\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Rf(\omega, s) e^{-is\rho} ds.$$

Sei $\xi = \rho\omega$ mit $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, $\omega \in S^1$, dann ist

$$|\xi| \hat{f}(\xi) = \rho \hat{f}(\rho\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}f(\omega, s) \rho e^{-is\rho} ds.$$

Sei Λf definiert durch $(\Lambda f)^\wedge(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi)$.

Die inverse Fourier-Transformation liefert

$$\begin{aligned} \Lambda f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (\Lambda f)^\wedge(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \int_0^\infty \rho^2 \hat{f}(\rho\omega) e^{i\langle x, \rho\omega \rangle} d\rho d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \int_0^\infty \rho^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{R}f(\omega, s) e^{-is\rho} ds e^{i\langle x, \rho\omega \rangle} d\rho d\omega = \\ &= \int_{S^1} h(\omega, \langle x, \omega \rangle) d\omega \end{aligned}$$

$$\text{mit } h(\omega, t) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbf{R}f(\omega, s) e^{-is\rho} ds \rho^2 e^{i\rho t} d\rho.$$

Da h über S^1 integriert wird, gilt

$$\int_{S^1} h(\omega, \langle x, \omega \rangle) d\omega = \int_{S^1} h_1(\omega, \langle x, \omega \rangle) d\omega,$$

wobei $h_1(\omega, t) := (h(\omega, t) + h(-\omega, -t))/2$ der gerade Anteil von h ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} h_1(\omega, t) &= c \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbf{R}f(\omega, s) e^{i\rho(t-s)} ds \rho^2 d\rho + \\ &+ c \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbf{R}f(-\omega, s) e^{i\rho(-t-s)} ds \rho^2 d\rho \end{aligned}$$

$$\text{mit } c := \frac{1}{8\pi^2}.$$

Ersetzt man im zweiten Doppelintegral s durch $-s$ und ρ durch $-\rho$ und verwendet die Symmetrie von Rf , so erhält man

$$h_1(\omega, t) = c \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\omega, s) e^{-i\rho s} e^{i\rho t} ds d\rho.$$

Aus den Eigenschaften der Fourier-Transformation für Ableitungen ergibt sich

$$h_1(\omega, s) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial s^2} Rf(\omega, s) = -\frac{1}{4\pi} g''(\omega, s)$$

und damit $Af = Lf$.

□

Die Eigenschaft $(\Lambda f)^\wedge(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi)$ läßt sich nach Natterer folgendermaßen deuten. Λ wirkt wie ein Hochpaßfilter, d.h. die niederen Frequenzanteile in f werden abgeschwächt, die höheren verstärkt. Denkt man bei f bzw. Af an Bilder, so sind die Werte von f und Af möglicherweise sehr verschieden, jedoch kann erwartet werden, daß Kanten und Objektgrenzen aus dem Bild f in der hochpaßgefilterten Version Af gut hervortreten. Numerische Beispiele haben gezeigt, daß dies insbesondere bei beschnittenen Projektionen (im Fall $n=2$) tatsächlich der Fall ist (Natterer [34], Smith [46]). F.Natterer hat dafür die folgende Interpretation gegeben. Das entsprechende Radon-Inversionsproblem ist bezüglich der höheren Frequenzanteile weniger schlecht gestellt als bezüglich der niederen.

Die Methode von Smith kann als Beispiel für die folgende allgemeine Vorgehensweise bei schlecht gestellten Problemen gesehen werden. Sei $T: X \longrightarrow Z$ ein linearer stetiger Operator, X, Z Hilbert-Räume und die Gleichung $Tf = g$ sei schlecht gestellt.

Sei $L: X \longrightarrow Y$ ein invertierbarer Operator. Man bestimmt Lf als Lösung der Gleichung $TL^{-1}(Lf) = g$.

Wesentlich ist die Wahl des Operators L ; die Gleichung $TL^{-1}\Phi = g$ soll in einem gewissen Sinn "weniger schlecht" gestellt sein, und Lf soll noch genügend Information über f enthalten.

Kapitel V: Numerische Ergebnisse

13. Gefilterte Rückprojektion im dreidimensionalen Fall

Um die in Kapitel II, Satz (5.1) angegebene Variante des Faltungsalgorithmus numerisch zu realisieren, ist aus den Daten g die Näherung $Q_\varepsilon g$ für die unbekannte Dichtefunktion f zu berechnen. Die Funktion f erfüllt die Gleichung $Pf = g$ und es ist $Q_\varepsilon g = \chi_\Omega P^*(g * \Phi_\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$, sowie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt. Die rechte Seite der Gleichung g ist durch endlich viele Werte gegeben und f ist ebenfalls an endlich vielen Stellen zu bestimmen.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt Möglichkeiten zur Diskretisierung obiger Formel für den Rekonstruktionsoperator Q_ε speziell im dreidimensionalen Fall, mit radialem Φ_ε , sowie die Wahl des Parameters ε . Die charakteristische Funktion χ_Ω in der Darstellung von Q_ε bedeutet für die Rechnung lediglich, daß f nur auf Ω bestimmt wird, außerhalb wird $f = 0$ gesetzt.

Zur numerischen Auswertung des Operators P^* geht man von der Definition des Oberflächenintegrals aus. Da $g = Pf$ gerade in den Variablen $\theta \in S^2$ und Φ_ε radial ist, ist auch $g * \Phi_\varepsilon$ gerade in θ . Aus diesem Grund betrachtet man Quadraturformeln für gerade Integranden zum näherungsweisen Berechnen des Integrals

$$(13.1) \quad \int_{S^2} h(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi h(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta.$$

Wir folgen dem Vorschlag von Natterer [34], VII.2, Gauß-Formeln zu verwenden, die für gerade Polynome in θ vom Grad kleiner oder gleich $2m$ das obige Integral (13.1) exakt integrieren.

Sei $m \in \mathbb{N}$ ungerade, die Stützstellen $\beta_i := i\pi/(m+1)$, $i = 0, 1, \dots, m$ äquidistant, sowie $0 < \alpha_{(m+1)/2} < \dots < \alpha_2 < \alpha_1 < \pi/2 < \alpha_{-1} < \dots < \alpha_{-(m+1)/2} < \pi$ symmetrisch zu $\pi/2$, d.h. $\alpha_{-j} = \pi/2 - \alpha_j$.

Die Quadraturformel

$$(13.2) \quad I_m^1 h := \frac{2\pi}{m+1} \sum_{j=-(m+1)/2}^{(m+1)/2} A_j \sum_{l=0}^m h(\alpha_j, \beta_l)$$

mit $\alpha_j = \arccos t_j$, t_j positive Nullstellen des Legendre-Polynoms P_{m+1} vom Grad $m+1$ und A_j die entsprechenden Gewichte

$$A_j = \frac{2}{(1-t_j^2) (P'_{m+1}(t_j))^2} ,$$

integriert Polynome bis zum Höchstgrad $2m$ über die Sphäre S^2 exakt. Die Herleitung besteht im wesentlichen in der Übertragung der üblichen Gaußformeln für das innere Integral aus (13.1) über $[0, \pi]$ (Natterer [34], VII.2). Für das äußere Integral ergibt sich die Trapezregel, was auch hinsichtlich der Integration über eine Periode des Integranden günstig ist.

Numerische Rechnung zeigt, daß die Stützstellen α_j annähernd gleichen Abstand haben und die Gewichte A_j sehr nahe an $\frac{\pi}{(m+1)} \sin \alpha_j$ liegen.

Aus diesem Grund schlägt Natterer ([34], VII.2) die folgende vereinfachte Formel mit äquidistanten Stützstellen α_j als Näherung für

$$\int_{S^2} h(\theta) d\theta \quad \text{vor:}$$

$$(13.3) \quad I_m^1 h := \frac{2\pi}{m+1} \sum_{j=-(m+1)/2}^{(m+1)/2} \frac{\pi}{m+1} \sin \alpha_j \sum_{l=0}^m h(\alpha_j, \beta_l) .$$

In den numerischen Beispielen des nächsten Abschnittes wird stets diese Formel (13.3) zur näherungsweisen Berechnung der Rückprojektion verwendet.

Für jede Richtung, die sich aus den Stützstellen α_j, β_i ergibt, ist die Faltung $g * \Phi_\varepsilon$ zu berechnen.

Wenn $\theta = (\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha)^t \in S^2$ ein Richtungsvektor ist, $\alpha \in [0, \pi)$, $\beta \in [0, 2\pi)$, so verwenden wir die orthonormalen Vektoren aus $\theta^\perp$:

$$\theta^1 = (\cos \beta, -\sin \beta, 0)^t,$$

$$\theta^2 = (\sin \beta \cos \alpha, \cos \beta \cos \alpha, -\sin \alpha)^t.$$

Wir gehen davon aus, daß die Daten $g(\theta, y)$ für festes $\theta \in S^2$ bezüglich des zweiten Argumentes $y \in \theta^\perp$ auf einem äquidistanten Rechteckgitter gegeben sind, wobei θ^1 und θ^2 die Koordinatenachsen bestimmen.

Das heißt, man kennt die Werte

$$g_\theta^{k,l} = g(\theta, k\theta^1 + l\theta^2)$$

mit einer festen Schrittweite $h > 0$, $k, l \in \mathbb{Z}$ und θ^1, θ^2 Orthonormalbasis von $\theta^\perp$.

Um nun das Integral

$$(13.4) \quad q(\theta, z) = (\Phi_\varepsilon * g)(\theta, z) = \int_{\theta^\perp} g(\theta, y) \Phi_\varepsilon(z-y) dy, \quad z \in \theta^\perp$$

zu approximieren, berechnet man die diskrete Faltung

$$q^h(\theta, z) = (\Phi_\varepsilon^h * g)(\theta, z) = h^2 \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} g_\theta^{k,l} \Phi_\varepsilon(z - (k\theta^1 + l\theta^2))$$

zur Schrittweite $h > 0$, $z \in \theta^\perp$.

q^h bestimmt man auch nur an diskreten Stellen, und zwar

$$(13.5) \quad q_\theta^{\mu,\nu} = h^2 \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} g_\theta^{k,l} \Phi_\varepsilon(\mu h \theta^1 + \nu h \theta^2 - (k\theta^1 + l\theta^2)), \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}.$$

Da $g = Pf$ und f kompakten Träger haben, folgt $g_\theta^{k,l} \neq 0$ nur für endlich viele $k, l \in \mathbb{Z}$. Die Summe ist also endlich.

Die Auswertung von Φ_ε und damit der diskreten Faltung in (13.5) ist problemlos, falls Φ_ε stetig oder mindestens beschränkt ist; dies ist für die Beispiele 1 bis 3 ((8.3), b,c,d), sowie für die Gauß-Filter (8.4) der Fall, nicht jedoch für das Filter 0 ((8.3) a). Der Faltungskern zur Rechteckfunktion $\varphi(x) = \varphi(r) = \chi_{[0,1]}/c$ als Approximation der Eins (Cho-Filter bei Nievergelt [36], und Satz (3.4) für $n = 2$ bzw. (3.3) für $n = 3$) hat in $r = \varepsilon$ eine Singularität, sowohl für $n = 2$ wie auch $n = 3$.

Mit $n = 3$, $\theta \in S^2$, $z \in \theta^\perp$ kann man die Faltung (13.4) in Polarkoordinaten schreiben und umformen

$$\int_{\theta^\perp} \Phi_\varepsilon(|y|) g(\theta, z - y) dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \Phi_\varepsilon(r) g(\theta, z - A r(\omega(\psi), 0)^t) d\psi dr ,$$

wobei $\omega(\psi) := (\cos\psi, \sin\psi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$ und A die 3×3 Matrix ist, die $e = (0, 0, 1)^t$ nach θ dreht (d.h. A ist orthogonal, $\det(A) = 1$ und $Ae = \theta$).

In dieser Form kann das Integral über r , wo die Singularität auftritt, z.B. mit Produktintegration behandelt werden. Numerische Experimente zeigten, daß auf diese Weise die Dichtefunktion f in einzelnen Punkten näherungsweise rekonstruiert werden kann. Wenn x der Bildpunkt ist und $f(x)$ bestimmt werden soll, so benötigt man die Daten g radial um $z = E_\theta x$; dies ist ein wesentlicher Nachteil, da $g(\theta, \cdot)$ meist auf einem Rechteckgitter gegeben ist. Für numerische Tests wurde durch Simulation g an den benötigten Stellen bereitgestellt, was jedoch einen beträchtlichen Rechenaufwand bedeutet. Auf diese Weise konnten nur einige wenige Bildpunkte berechnet werden und eine Bewertung der Bildqualität der Rekonstruktion ist damit schwer möglich. Auch die Umrechnung der Werte von g aus einem Rechteckgitter auf ein polares Gitter um den Punkt $z = E_\theta x$ durch Interpolation scheint schwierig und aufwendig. Aus diesen Gründen wurde auf die weitere Analyse des Filters von Satz (3.3) (entsprechend dem Kern von Cho und Nievergelt) im Zusammenhang mit praktischen Rekonstruktionen verzichtet.

Für stetige Kerne Φ_ε ergibt sich eine diskrete Version des Faltungsalgorithmus aus den Näherungen (13.3) und (13.5).

Sei durch die Winkel α_j, β_i eine Diskretisierung der Sphäre S^2 wie in (13.3) gegeben, die Daten g seien für jedes $\theta_{i,j} = \theta(\alpha_j, \beta_i) \in S^2$ auf einem Rechteckgitter in $\theta_{i,j}^\perp$ mit Schrittweite $h > 0$ bekannt und mit $g_{i,j}^{k,l}$ bezeichnet.

Die Rekonstruktion

$$Q_\varepsilon g(x) = \chi_\Omega P^\#(g * \Phi_\varepsilon)(x) = \int_{S^2} q(\theta, E_\theta x) d\theta, \quad x \in \Omega,$$

mit $q(\theta, z) = g * \Phi_\varepsilon(\theta, z)$, $z \in \theta^\perp$,

berechnet man näherungsweise, indem man das Oberflächenintegral durch (13.3) und die Faltung durch (13.5) ersetzt.

Es ergibt sich noch das Problem, daß q durch (13.5) auf einem Gitter berechnet wird, jedoch für die Rückprojektion in $E_\theta x$ benötigt wird. Da $E_\theta x$ in der Regel kein Gitterpunkt ist, wird man interpolieren, z.B. bilinear oder bikubisch in einer Umgebung von $E_\theta x$. Wir verwenden die einfachste Möglichkeit, und zwar wird für $q(\theta, E_\theta x)$ der Wert des nächstgelegenen Gitterpunktes zu $E_\theta x$ genommen ('nearest neighbour interpolation', vgl. Herman [18], 8.3, 8.5, 8.6 für den zweidimensionalen Fall).

Wir formulieren nun die diskrete Version der dreidimensionalen gefilterten Rückprojektion für den Operator P .

(13.6) Diskreter dreidimensionaler Faltungsalgorithmus.

Sei m ungerade natürliche Zahl, α_j, β_i Winkeldiskretisierung wie in (13.3), $h > 0$ feste Schrittweite für die diskrete Faltung, $\varepsilon > 0$ ein fest gewählter Regularisierungsparameter. Für jede Richtung $\theta_{i,j} = \theta(\alpha_j, \beta_i)$ und orthogonale Vektoren $\theta_{i,j}^1, \theta_{i,j}^2 \in \theta_{i,j}^\perp$ (siehe (13.5)) sei g auf einem Rechteckgitter in $\theta_{i,j}^\perp$ gegeben

$$g_{i,j}^{k,l} = g(\theta_{i,j}, k h \theta_{i,j}^1 + l h \theta_{i,j}^2), \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

und $g_{i,j}^{k,l} \neq 0$ nur für endlich viele k, l .

1.) Auswertung von Φ_ε auf dem durch $k, l \in \mathbb{Z}$ gegebenen Gitter und abspeichern der Werte $\Phi_\varepsilon^{k,l}$; dabei werden nur endlich viele Stellen benötigt, da nur für endlich viele $k, l \in \mathbb{Z}$ $g_{1,j}^{k,l} \neq 0$.

Da Φ_ε rotationssymmetrisch ist, genügt es $k, l \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten und die Werte sind unabhängig von $\theta_{1,j}$.

2.) Für jede Richtung $\theta_{1,j}$ bestimmt man die diskrete Faltung

$$q_{1,j}^{\mu,\nu} = h^2 \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} g_{1,j}^{k,l} \Phi_\varepsilon^{\mu-k, \nu-l}, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}$$

(entsprechend der Formel (13.5)).

Für die zu berechnenden Bildpunkte x (endlich viele, die im Normalfall auf einem dreidimensionalen Gitter liegen) bestimmt man den nächstgelegenen Gitterpunkt zu $E_{0,1,j} x$; der entsprechende Wert sei mit $q_{1,j}(x)$ bezeichnet.

3.) Rückprojektion nach (13.3) liefert den Näherungswert

$$\tilde{f}(x) = \frac{2\pi}{m+1} \sum_{j=-(m+1)/2}^{(m+1)/2} \frac{\pi}{m+1} \sin \alpha_j \sum_{l=0}^m q_{1,j}(x).$$

Programmiertechnisch wird man nach Berechnung der Faltung zu einer Richtung $\theta_{1,j}$ für alle Bildpunkte x den jeweiligen Beitrag zu obiger Summe berechnen und auf diese Weise die Summe aktualisieren. Zur Berechnung der diskreten Faltung bietet sich die Methode der schnellen Fourier-Transformation an (Brigham [4], Ahmed [2], 3.6 und 4, Niederdröck [35]).

Für die praktische Rechnung ist die Frage nach der Wahl des Regularisierungsparameters besonders wichtig. In Abschnitt 6, (6.4) wurde eine Beziehung zwischen der Bandbreite b des Filters Φ (beziehungsweise der annähernden Bandbreite) und der Schrittweite h der Diskretisierung für die Faltung hergeleitet, um den Fehler bei der Approximation der Faltung durch diskrete Faltung klein zu halten.

Für das spezielle Filter 1 aus (8.3) b) untersuchen wir den Zusammenhang zwischen annähernder Bandbreite und Regularisierungsparameter ε .

Es ist

$$\varphi_{\varepsilon}(\mathbf{r}) := \frac{3}{\pi \varepsilon^3} (1 - r/\varepsilon) \chi_{[0, \varepsilon]} \quad , \quad r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad .$$

Nach (11.3) gilt $\hat{\Phi}_{\varepsilon}(\xi) = c_1 |\xi| \hat{\varphi}_{\varepsilon}(\xi)$, woraus man schließt, daß für Φ_{ε} und φ_{ε} die annähernde Bandbreite gleich ist.

Wir schätzen nun ab

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}_{\varepsilon}(\xi)| &= |c_2 \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_{\varepsilon}(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x}| \leq \\ &\leq c_3 \int_{K_3(0, \varepsilon)} \left(1 - \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}{\varepsilon}\right) e^{-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \leq \\ &\leq c_4 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1 - |x_1|/\varepsilon) e^{-ix_1 \xi_1} dx_1 = c_5 \left(\frac{\sin(\xi_1 \varepsilon/2)}{\xi_1} \right)^2 . \end{aligned}$$

Dabei sind c_1 bis c_4 geeignete Konstante. Die letzte Gleichung folgt aus der eindimensionalen Fourier-Transformation der "Dachfunktion" (linearer B-Spline), vgl. Brigham [4] 2.4, Seite 26. Die Werte der Funktion

$$\left(\frac{\sin(\xi_1 \varepsilon/2)}{\xi_1} \right)^2$$

werden klein für $|\xi_1| \geq 2\pi/\varepsilon$, woraus man die annähernde Bandbreite

$b_a = 2\pi/\varepsilon$ schätzt. Zusammen mit der Bedingung $b_a \leq \pi/h$ aus (6.4)

erhält man für die Wahl von ε die Bedingung

$$(13.7) \quad \varepsilon \geq 2h.$$

Da andererseits ε aus Konvergenzgründen möglichst klein werden soll, erhält man aus obiger Überlegung den Wert

$$(13.8) \quad \varepsilon_{\mathbf{R}} := 2h$$

als Schätzung für eine gute Wahl des Regularisierungsparameters.

Die numerischen Beispiele des nächsten Abschnittes bestätigen diese Wahl von ϵ .

14. Beispiele für dreidimensionale Rekonstruktionen

Mit Hilfe der diskreten Version des Faltungsalgorithmus (13.6) kann man die Gleichung $\mathbf{P}f = g$ im Fall $n = 3$ am Rechner näherungsweise lösen. Alle Rechnungen dieses Abschnittes wurden an der Rechenanlage Cyber 995 (CDC) des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt. Wegen des erheblichen Programmier- und Rechenaufwandes im dreidimensionalen Fall wurden vergleichsweise einfache Beispiele mit relativ grober Diskretisierung gerechnet. Ein Simulationsprogramm liefert zu der gewählten Dichtefunktion f die Werte $g = \mathbf{P}f$, die abgespeichert werden. Anschließend wird mit dem Rekonstruktionsprogramm eine Näherung $\tilde{f}$ an f mit Hilfe von Algorithmus (13.6) bestimmt.

Beispiele für die numerische Lösung der Gleichung $\mathbf{P}f = g$ im Fall $n = 3$ sind in der Literatur kaum zu finden; einige Versuche (mit gewaltigem Rechenaufwand verbunden) wurden bei Herman [18], chap. 14 beschrieben. Über eine praktische Realisierung der Inversionsmethode von Smith [44] wird nur im zweidimensionalen Fall berichtet, ebenso wird das Kaczmarz-Verfahren (siehe Hamaker [16]) zwar für dreidimensionale Rekonstruktionen vorgeschlagen, aber ohne numerische Resultate vorgestellt. Die Gleichung $\mathbf{R}f = g$ für $n = 3$ ist weniger problematisch und wird in der Kernspin-Tomographie meist mit Fourier-Methoden gelöst.

In den folgenden Beispielen zur Gleichung $\mathbf{P}f = g$, $n = 3$ wird immer auf einem Würfel um den Ursprung mit Kantenlänge 2, d.h. $\Omega = [-1, 1]^3$ gerechnet, und zwar wird Ω in x, y bzw. z -Richtung in N_X, N_Y, N_Z gleiche Teile geteilt. Zur Darstellung von Originaldichte f und Rekonstruktion $\tilde{f}$ werden die durch die Diskretisierung in z -Richtung entstehenden N_Z Schichten $I_Z = 1, \dots, N_Z$ betrachtet (von unten nach oben durchnummeriert) und darauf f und $\tilde{f}$ als Fläche bzw. zum Teil als Bildmatrix mit gerundeten Dichtewerten dargestellt. Die Sphäre S^2 wird durch $M \times M$

Richtungen diskretisiert, auf θ^1 betrachtet man jeweils ein äquidistantes Rechteckgitter mit Schrittweite $h = 0.01$ und NT Punkten in jeder der zwei Richtungen (θ^1 ist zweidimensional).

(14.1) Beispiel 1

Die Testfunktion f sei auf $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 3 & \text{für } |x| \leq 0.5 \\ 1 & \text{für } 0.5 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für die Diskretisierung von Ω wurde gewählt $NX = NY = NZ = 17$, dies entspricht Schrittweiten $HX = HY = HZ = 0.117647$. Außerdem ist $M = 11$, $NT = 20$ und die Schrittweite für die diskrete Faltung $h = 0.1$; IZ gibt die Schichtnummer an, $IZ = 1$ entspricht $z = -1 + HZ/2$, $IZ = 9$ entspricht der Schicht durch 0. Die Funktion f kann man sich folgendermaßen anschaulich als "Objekt" vorstellen: eine Kugel mit Radius 1 um den Ursprung und mit der Dichte 1 enthält eine kleinere Kugel mit Radius 0.5 um den Ursprung und mit der Dichte 3. Die einzelnen Schichten zeigen jeweils einen Kreis mit Dichte 1, der von unten nach oben größer wird und ab der Stelle $z = 0.5$ einen zweiten Kreis mit Dichte 3, der nach oben auch größer wird und für die mittlere Schicht $IZ = 9$ am größten ist; anschließend kehrt sich die Situation um, die Kreise werden mit größerem Abstand von Ursprung immer kleiner. Da das Zeichenprogramm die Skalierung automatisch wählt, werden die einzelnen Schichten in unterschiedlichem Maßstab gezeichnet.

Die Rekonstruktion wurde mit dem Filter 1 aus (8.3) b) und Regularisierungsparameter $\varepsilon = EPS = 0.2$ durchgeführt. Das Original ist in den Zeichnungen durch $EPS = 0$ gekennzeichnet. Der Regularisierungsparameter $EPS = 0.2$, der ursprünglich durch Ausprobieren als geeignet gefunden wurde, ergibt sich auch durch die Beziehungen (13.7), (13.8). Die rekonstruierten Bilder zeigen in jeder Schicht eine von ε abhängige Glättung; statt der Unstetigkeiten (Sprungstellen) des Originals treten Flanken mit großer aber endlicher Steigung auf.

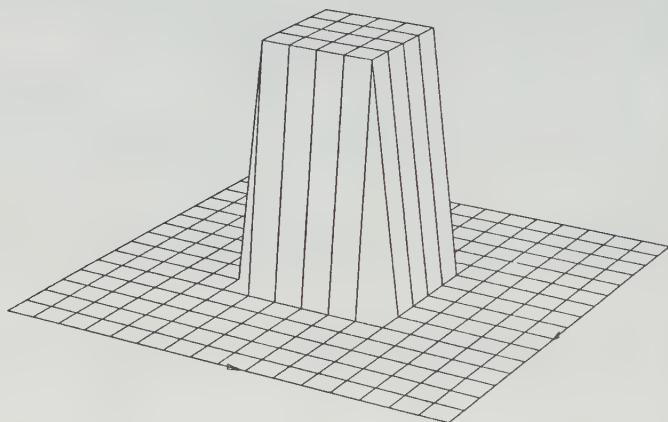
Die Daten $g = Pf$ wurden in einem Simulationsprogramm berechnet, auf drei Nachkommastellen gerundet und abgespeichert; die Rekonstruktion wird also mit leicht gestörten Daten ("arithmetisches Rauschen") durchgeführt, die Ergebnisse sind trotzdem zufriedenstellend.

Als Besonderheit fällt auf, daß die Schichten $IZ = 3, 4$ schon Anzeichen der inneren Kugel zeigen, obwohl sie im Original noch nicht auftritt. Die innere Kugel kommt also nicht plötzlich, sondern nach und nach ins Bild, man erkennt einen "stetigen Übergang" von der Dichte 1 zur Dichte 3. Wir interpretieren dieses Verhalten als Glättung in der dritten Dimension (d.h. in z-Richtung). Die Abschwächung dieses Effekts und damit "Kontrastverschärfung" kann durch feinere Diskretisierung und kleineres ε erreicht werden.

Die Rechenzeit für dieses Beispiel beträgt ca. 60 Sekunden pro Schicht, wobei das Programm hinsichtlich der Rechenzeit nicht optimiert wurde.

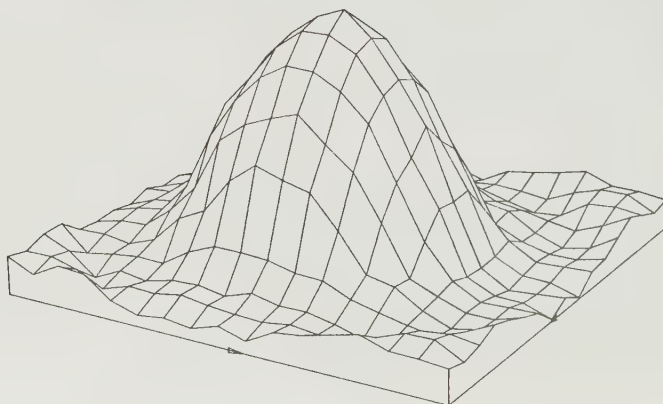
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=1 EPS=0.



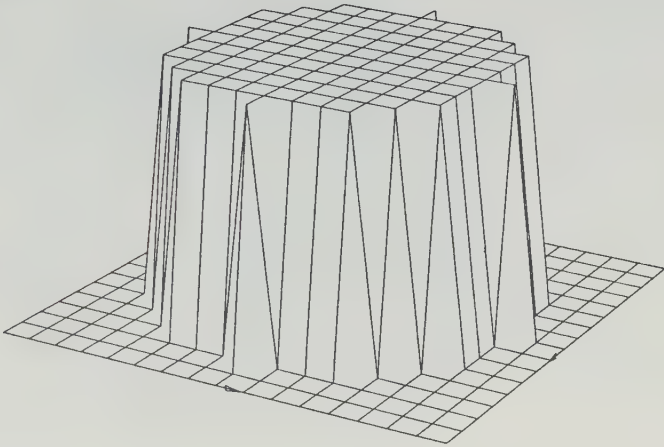
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=1 EPS=.2



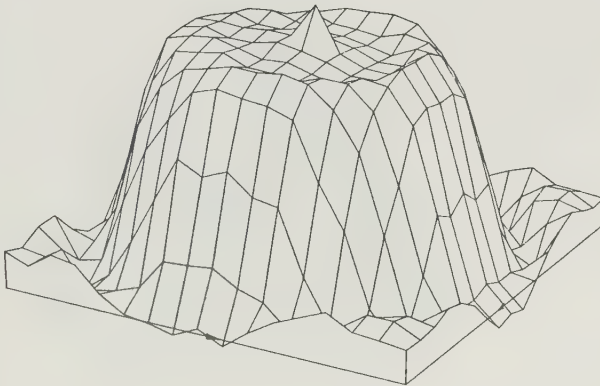
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=3 EPS=0.



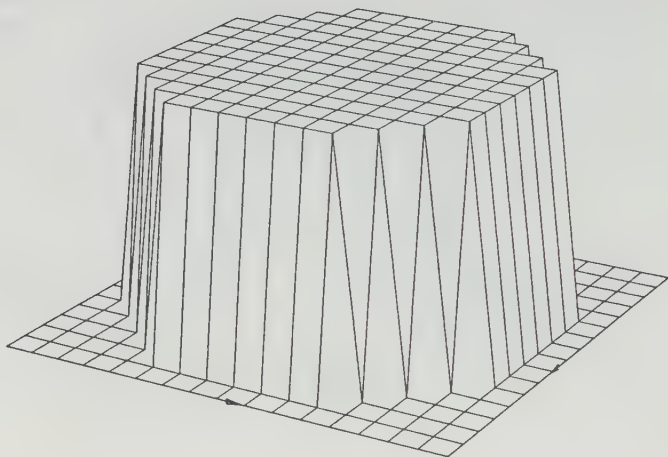
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=3 EPS=.2



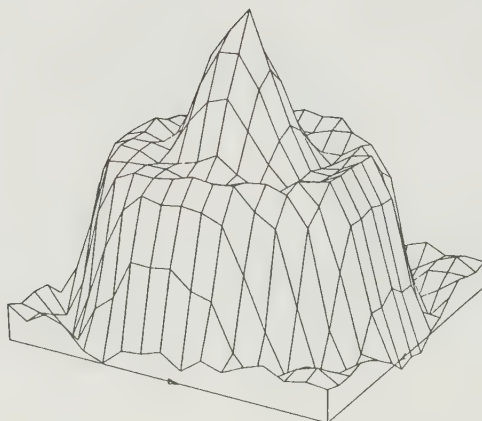
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=4 EPS=0.



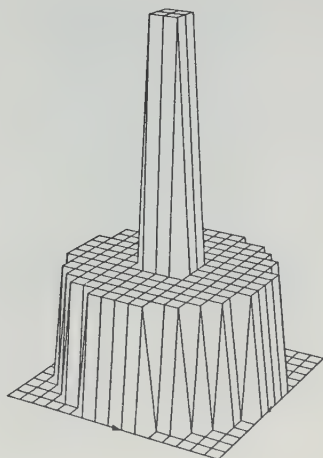
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=4 EPS=.2



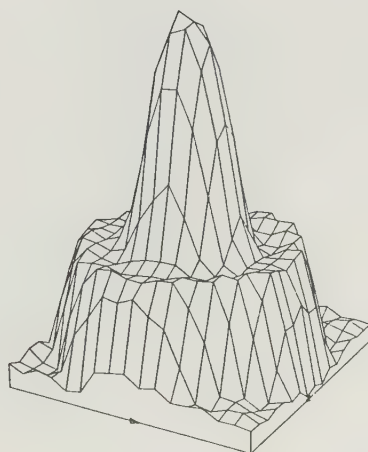
$NX=17$ $NY=17$ $NZ=17$

$IZ=5$ $EPS=0.$



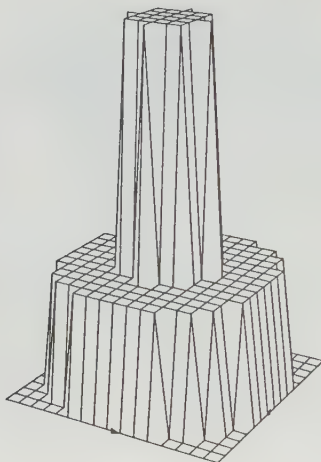
$NX=17$ $NY=17$ $NZ=17$

$IZ=5$ $EPS=.2$



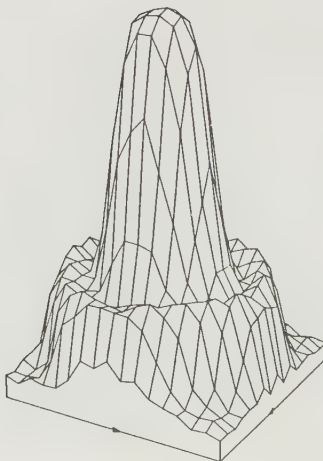
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=6 EPS=0.



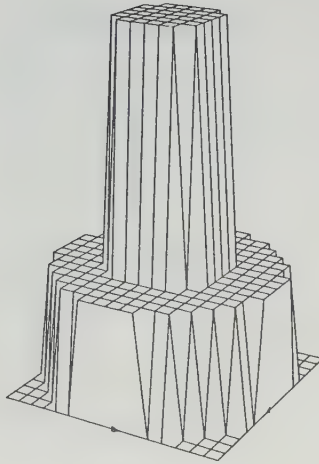
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=6 EPS=.2



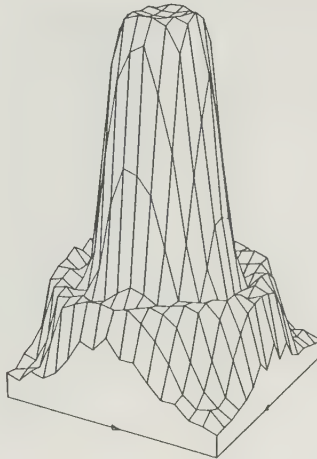
$NX=17$ $NY=17$ $NZ=17$

$IZ=7$ $EPS=0.$



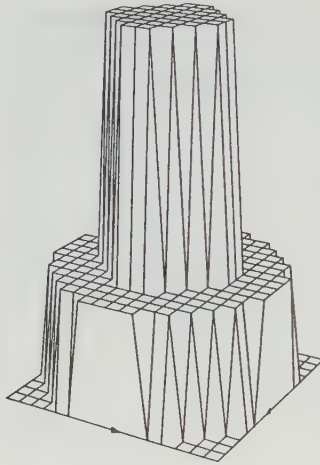
$NX=17$ $NY=17$ $NZ=17$

$IZ=7$ $EPS=.2$



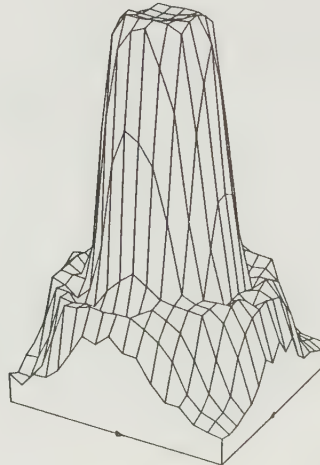
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=8 EPS=0.



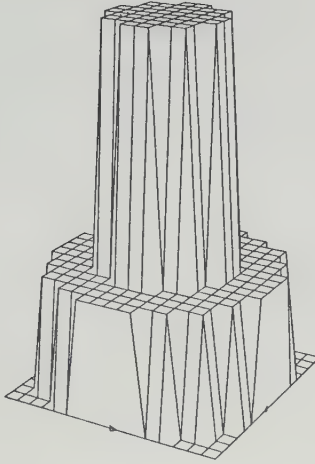
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=8 EPS=.2



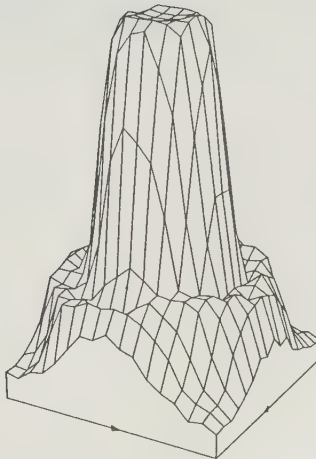
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=0.



NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=.2



Beispiel 1:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	1	11

EPS= 2.000000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1
0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1
0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2
0.2	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1
0.2	0.2	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.8	0.8	0.8	0.7	0.5	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.2	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9	0.9	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.1	0.0	0.0
0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	1.0	0.9	0.8	0.7	0.4	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.2	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.1	0.0	0.0
0.2	0.2	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	0.8	0.7	0.5	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
0.2	0.2	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
0.2	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.5	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2
0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1
0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1
0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

Beispiel 1:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	3	11

EPS= 2.00000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.0	0.1	0.2	0.2	0.1
0.2	0.2	0.2	0.1	0.3	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.2	0.1	0.0	0.2	0.2	0.2
0.3	0.2	0.1	0.4	0.6	0.7	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	0.4	0.1	0.0	0.1	0.2
0.2	0.1	0.3	0.6	0.8	0.9	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.8	0.7	0.4	0.1	0.0	0.2
0.2	0.2	0.5	0.8	0.9	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.5	0.2	0.0	0.1
0.1	0.3	0.7	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.7	0.4	0.1	0.0
0.1	0.4	0.7	1.0	1.0	1.0	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.8	0.4	0.1	0.0
0.1	0.4	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.1	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.4	0.1	0.0
0.1	0.4	0.7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9	1.0	0.8	0.4	0.1	0.0
0.2	0.4	0.7	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.4	0.1	0.0
0.2	0.2	0.5	0.8	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	0.2	0.1	0.1
0.2	0.1	0.3	0.6	0.8	0.9	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.9	0.7	0.4	0.1	0.0	0.2
0.3	0.2	0.1	0.4	0.6	0.7	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	0.1	0.2
0.2	0.2	0.2	0.1	0.3	0.5	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.3	0.1	0.0	0.2	0.2	0.2
0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1	0.0	0.2	0.2	0.2	0.2
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.0	0.1	0.0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Beispiel 1:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	5	11

EPS= 2.00000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.2	0.2	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.7	0.8	0.7	0.6	0.4	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2
0.2	0.3	0.3	0.5	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.8	0.6	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.3	0.3	0.5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.9	1.0	0.7	0.2	0.1	0.2	0.2
0.3	0.5	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.5	0.1	0.2	0.2
0.3	0.7	0.9	0.9	0.9	0.9	1.1	1.3	1.4	1.2	0.9	0.8	0.9	0.9	0.7	0.3	0.1	0.1
0.5	0.8	0.9	0.9	0.9	1.2	1.7	2.0	2.0	1.8	1.3	0.9	0.8	0.9	0.9	0.5	0.1	0.1
0.5	0.9	0.9	0.9	1.0	1.5	2.1	2.4	2.4	2.2	1.7	1.0	0.9	0.9	0.9	0.5	0.0	0.0
0.5	0.9	0.9	0.9	1.0	1.7	2.3	2.5	2.5	2.4	1.8	1.2	0.9	0.9	0.9	0.6	0.1	0.1
0.5	0.9	0.9	0.9	1.0	1.5	2.1	2.4	2.5	2.2	1.7	1.1	0.9	0.9	0.9	0.5	0.1	0.1
0.5	0.9	1.0	0.9	1.0	1.2	1.7	2.1	2.1	1.8	1.4	0.9	0.8	0.9	0.9	0.5	0.1	0.1
0.4	0.7	0.9	0.9	0.9	0.9	1.2	1.3	1.5	1.2	1.0	0.9	0.9	0.9	0.8	0.3	0.1	0.1
0.3	0.5	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	1.0	0.9	0.6	0.1	0.2	0.2
0.3	0.3	0.5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.7	0.2	0.1	0.2
0.2	0.3	0.3	0.5	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.2	0.2	0.2	0.3	0.5	0.6	0.8	0.8	0.8	0.7	0.7	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2

Beispiel 1:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	6	11

EPS= 2.00000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.5	0.4	0.5	0.3	0.4	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2
0.2	0.3	0.3	0.4	0.6	0.7	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.5	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2
0.3	0.3	0.4	0.7	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.9	0.8	0.4	0.3	0.2	0.2
0.3	0.5	0.7	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.4	0.2	0.2
0.4	0.7	0.9	0.9	0.8	0.8	1.1	1.3	1.3	1.2	1.0	0.9	0.9	1.0	0.7	0.3	0.2
0.5	0.8	0.9	0.9	0.9	1.2	1.3	1.8	2.0	2.1	1.8	1.4	1.0	0.8	0.9	0.9	0.5
0.6	0.9	0.9	0.9	1.2	2.0	2.6	2.8	2.8	2.6	2.1	1.3	0.9	0.8	1.0	0.7	0.3
0.6	1.0	0.9	0.9	1.5	2.3	2.9	2.9	3.0	2.9	2.5	1.6	1.0	0.8	0.9	0.8	0.2
0.7	1.0	0.9	0.9	1.5	2.5	2.9	3.0	3.0	3.0	2.7	1.9	1.0	0.8	0.9	0.8	0.3
0.6	1.0	0.9	0.9	1.5	2.3	2.9	3.0	3.0	2.9	2.6	1.6	1.1	0.8	0.9	0.8	0.2
0.6	1.0	0.9	0.9	1.2	2.0	2.6	2.8	2.8	2.6	2.1	1.3	0.9	0.9	1.0	0.7	0.3
0.5	0.8	1.0	0.9	0.9	1.3	1.9	2.1	2.3	1.9	1.5	1.0	0.9	1.0	0.9	0.5	0.2
0.4	0.7	0.9	0.9	0.8	0.9	1.1	1.3	1.3	1.3	1.0	0.9	0.9	1.0	0.8	0.3	0.2
0.3	0.5	0.7	0.9	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.9	0.4	0.2	0.2
0.3	0.3	0.4	0.7	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.9	0.8	0.4	0.3	0.2	0.2
0.2	0.3	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3	0.3	0.2
0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.4	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2

Beispiel 1:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	7	11

EPS= 2.000000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.4	0.6	0.5	0.7	0.5	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2
0.2	0.3	0.3	0.5	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.7	0.6	0.3	0.3	0.3	0.2
0.3	0.3	0.5	0.9	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.6	0.4	0.3	0.2
0.4	0.6	0.9	0.9	0.8	0.9	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	1.0	1.0	1.0	0.6	0.3	0.2
0.4	0.8	0.9	0.8	0.8	1.0	1.6	1.8	1.8	1.7	1.3	0.9	0.9	1.0	0.8	0.5	0.2
0.6	0.9	0.9	0.8	1.1	1.9	2.4	2.7	2.7	2.4	1.9	1.3	0.8	0.9	0.9	0.7	0.3
0.7	1.0	0.9	1.0	1.8	2.6	3.0	3.0	3.0	3.0	2.8	1.8	1.1	0.8	1.0	0.8	0.4
0.8	1.0	0.9	1.1	2.1	2.9	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.3	1.4	0.8	0.9	0.9	0.3
0.9	1.0	0.9	1.2	2.2	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.1	2.6	1.5	0.9	0.9	0.9	0.5
0.8	1.0	0.9	1.1	2.2	2.9	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.3	1.4	0.9	0.9	0.9	0.3
0.8	1.0	0.9	1.0	1.8	2.6	3.0	3.0	3.0	3.0	2.8	1.9	1.1	0.9	1.0	0.8	0.5
0.6	0.9	0.9	0.9	1.1	2.0	2.5	2.8	2.8	2.5	2.1	1.4	0.9	1.0	1.0	0.7	0.3
0.5	0.9	0.9	0.8	0.9	1.1	1.6	1.9	1.9	1.7	1.3	0.9	1.0	1.0	0.9	0.6	0.3
0.4	0.6	0.9	0.9	0.8	0.8	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	1.0	0.9	0.6	0.3	0.2
0.3	0.4	0.5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.9	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2
0.3	0.4	0.4	0.6	0.8	0.9	0.9	1.0	0.9	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2
0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.7	0.6	0.7	0.6	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2

Beispiel 1:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	8	11

EPS= 2.00000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.7	0.6	0.7	0.6	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2
0.2	0.3	0.4	0.6	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2
0.3	0.4	0.6	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.7	0.4	0.3	0.2
0.4	0.6	0.9	0.9	0.8	0.8	1.0	1.1	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.6	0.4	0.3
0.5	0.9	0.9	0.8	0.9	1.2	1.9	2.1	2.0	1.9	1.5	1.0	0.9	0.9	0.9	0.6	0.3
0.6	0.9	0.9	0.9	1.3	2.1	2.7	2.8	2.9	2.6	2.3	1.4	0.9	0.9	0.9	0.7	0.3
0.8	0.9	0.9	1.1	2.1	2.9	3.0	3.0	3.0	3.0	2.9	2.2	1.3	0.9	1.0	0.8	0.5
0.9	1.0	0.9	1.3	2.4	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.6	1.7	0.9	0.9	0.9	0.5
0.9	1.0	0.9	1.4	2.5	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.8	1.7	0.9	0.8	0.9	0.6
0.9	1.0	0.9	1.3	2.4	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.6	1.7	0.9	0.9	0.9	0.5
0.8	0.9	0.9	1.1	2.1	2.9	3.0	3.0	3.0	3.0	2.9	2.2	1.3	0.9	1.0	0.9	0.5
0.7	0.9	0.9	0.9	1.3	2.3	2.8	2.9	3.0	2.7	2.4	1.6	1.0	1.0	1.0	0.8	0.4
0.5	0.9	0.9	0.8	0.9	1.3	1.9	2.2	2.1	2.0	1.6	1.0	1.0	1.0	0.9	0.6	0.3
0.4	0.6	0.9	0.9	0.7	0.8	1.0	1.1	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.6	0.4	0.3
0.3	0.4	0.6	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.8	0.9	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2
0.3	0.3	0.4	0.6	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.7	0.4	0.3	0.3	0.2
0.3	0.2	0.3	0.4	0.4	0.6	0.7	0.7	0.8	0.7	0.7	0.5	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2

Beispiel 1:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	9	11

EPS= 2.00000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.7	0.6	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2
0.3	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.7	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2
0.3	0.4	0.5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2
0.4	0.6	0.9	0.9	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.6	0.4	0.3
0.5	0.9	0.8	0.8	0.9	1.2	1.9	2.1	2.0	1.9	1.5	1.0	1.0	1.0	0.9	0.6	0.3
0.6	0.9	0.9	0.9	1.3	2.1	2.6	2.8	2.9	2.6	2.2	1.4	0.9	0.9	0.9	0.7	0.3
0.8	0.9	0.9	1.1	2.1	2.8	3.0	3.0	3.0	3.0	2.9	2.2	1.3	0.9	1.0	0.8	0.5
0.9	1.0	0.9	1.3	2.4	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.5	1.7	0.9	0.9	0.9	0.5
0.9	1.0	0.9	1.4	2.5	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.8	1.7	0.9	0.8	0.9	0.6
0.9	1.0	0.9	1.3	2.4	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.5	1.7	0.9	0.9	0.9	0.5
0.8	1.0	0.9	1.1	2.1	2.8	3.0	3.0	3.0	3.0	2.9	2.2	1.3	0.9	1.0	0.9	0.5
0.7	0.9	0.9	0.9	1.3	2.2	2.8	2.9	3.0	2.7	2.3	1.5	1.0	1.0	1.0	0.7	0.4
0.5	0.9	0.9	0.8	0.9	1.3	2.0	2.2	2.1	2.0	1.6	1.0	1.0	1.0	0.9	0.6	0.3
0.4	0.6	0.9	0.9	0.8	0.8	1.0	1.1	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.6	0.4	0.3
0.3	0.4	0.5	0.9	0.9	0.9	0.8	0.9	0.8	0.9	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2
0.3	0.3	0.4	0.6	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2
0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.7	0.7	0.5	0.4	0.4	0.3	0.3	0.2

(14.2) Beispiel 2

Die Dichtefunktion sei

$$f(x) := \begin{cases} 3 & \text{für } |x - x^{\text{mp}}| \leq 0.5 \\ 1 & \text{für } 0.5 < |x - x^{\text{mp}}|, |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$x^{\text{mp}} := (0.4, 0, 0)^t,$$

$$N_X = N_Y = N_Z = 13, \quad N_T = 13, \quad M = 5.$$

Rekonstruiert wurde wieder mit dem Filter 1; die Schicht IZ = 3 zeigt Glättung in z-Richtung.

Das Beispiel wurde mit $\text{EPS} = 0.33$ gerechnet, die Schätzung (13.8) ergibt $\varepsilon_a = 4/13$, das ist gerundet 0.31.

Die Rechenzeit beträgt ungefähr 4 Sekunden pro Schicht.

(14.3) Beispiel 3

Als Dichtefunktion wurde f wie im Beispiel 1 gewählt. Nach Berechnung der Daten g wurde eine Störung

$$s^{k,l} := 0.71 \sin(10k) \cos(10l)$$

aufaddiert. Man erkennt, wie ein größeres EPS eine stärkere Glättung bewirkt.

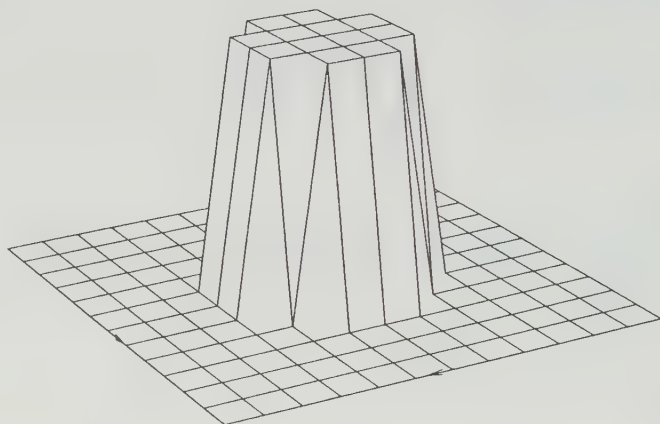
(14.4) Beispiel 4

Die Testfunktion f wurde wieder wie in Beispiel 1 gewählt. Die Rekonstruktion wurde mit verschiedenen Filtern gemacht; man erkennt, daß das Filter 2 aus (8.3) wenig glättend und damit kontrastverstärkend wirkt, jedoch ziemlich ungenaue Werte liefert. Das Filter 3 aus (8.3) glättet stärker, die Werte sind besser, was aber nicht unbedingt bessere Bildqualität bedeutet.

Das Gauß-Filter wirkt sehr stark glättend, die Struktur des Objekts ist in der Rekonstruktion kaum zu erkennen; möglicherweise ist das Gauß-Filter nur mit sehr feiner Diskretisierung verwendbar.

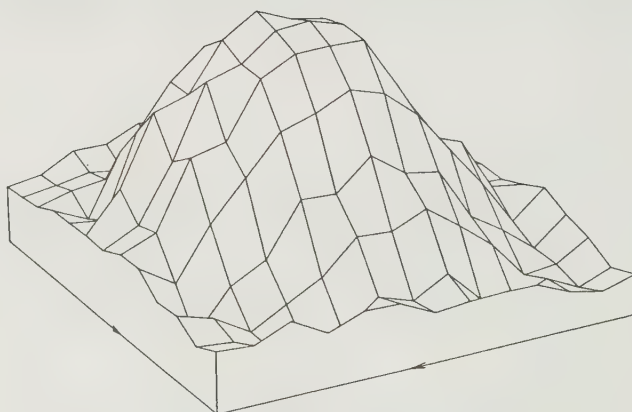
$NX=13$ $NY=13$ $NZ=13$

$IZ=1$ $EPS=0.$



$NX=13$ $NY=13$ $NZ=13$

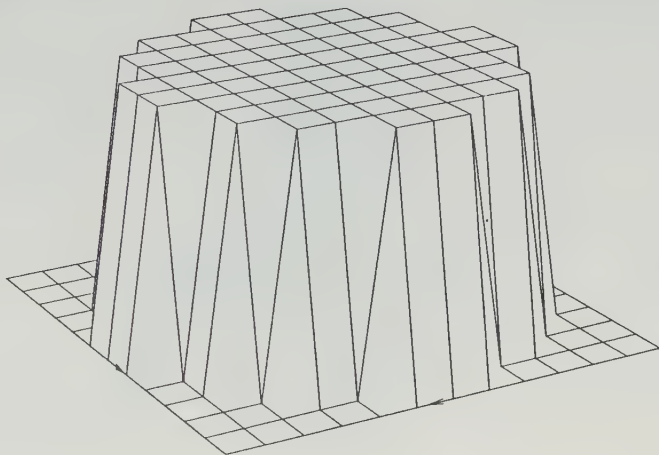
$IZ=1$ $EPS=.33$



Beispiel 2

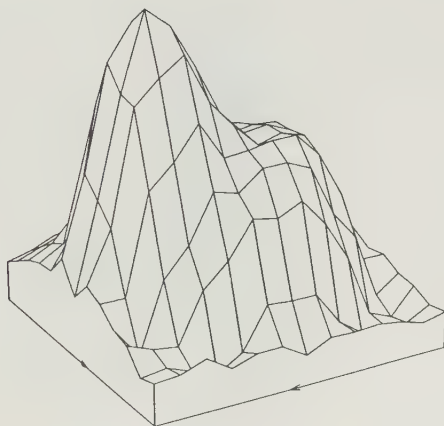
$NX=13$ $NY=13$ $NZ=13$

$IZ=3$ $EPS=0.$



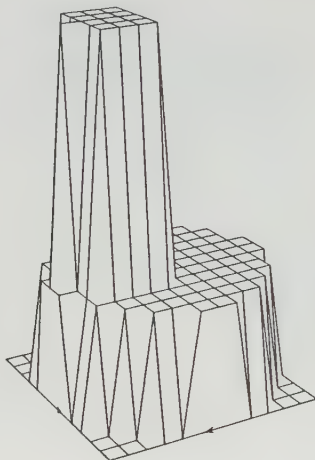
$NX=13$ $NY=13$ $NZ=13$

$IZ=3$ $EPS=.33$



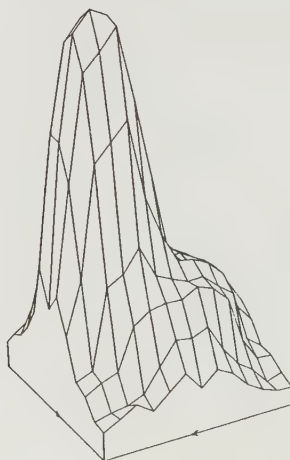
NX=13 NY=13 NZ=13

IZ=5 EPS=0.



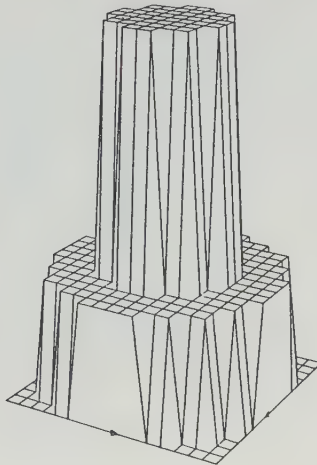
NX=13 NY=13 NZ=13

IZ=5 EPS=.33



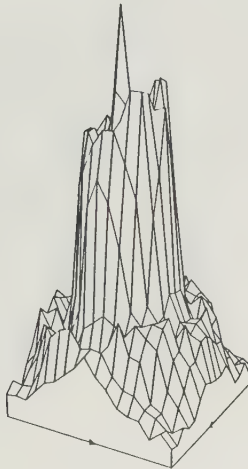
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=0.



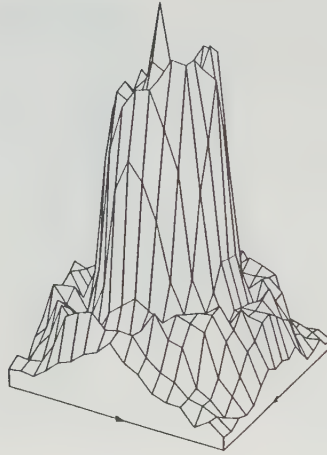
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=.2



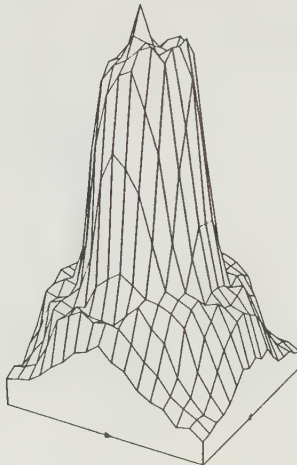
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=.22



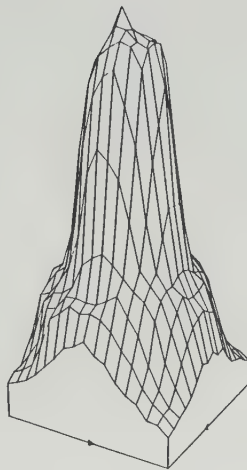
NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=.24



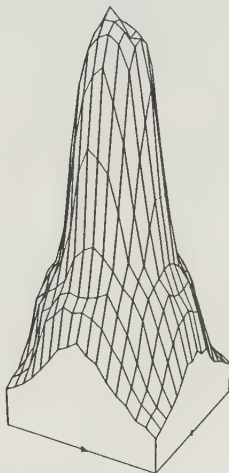
$NX=17$ $NY=17$ $NZ=17$

$IZ=9$ $EPS=.25$



$NX=17$ $NY=17$ $NZ=17$

$IZ=9$ $EPS=.26$



Beispiel 3:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	9	11

EPS= 2.00000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.7	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1
0.3	0.3	0.3	0.5	0.9	1.0	1.1	0.9	0.9	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.1
0.2	0.5	0.6	1.1	0.8	0.9	0.7	0.9	1.0	1.1	1.2	0.9	0.9	0.5	0.3	0.3	0.3
0.4	0.6	0.9	0.9	0.8	0.7	1.0	1.1	1.2	1.1	1.0	1.2	1.1	1.0	0.6	0.4	0.2
0.6	0.9	0.9	0.7	0.7	1.1	2.2	2.3	1.9	1.6	1.2	1.1	1.1	1.0	0.9	0.4	0.2
0.6	0.9	1.0	0.7	1.1	2.4	2.7	2.8	2.9	2.5	2.2	1.2	1.0	1.2	0.8	0.7	0.4
0.8	1.0	0.8	1.1	2.3	2.9	2.6	2.7	3.0	3.3	3.3	2.1	1.1	0.9	1.1	0.7	0.5
0.8	0.9	0.9	1.1	2.8	3.0	2.7	3.2	2.8	2.7	3.4	2.6	1.3	1.0	1.0	0.8	0.5
1.0	1.0	0.7	1.4	2.8	2.7	2.9	4.0	3.0	1.9	3.1	3.1	1.3	1.0	1.0	0.9	0.5
0.9	1.0	0.8	1.2	2.8	2.9	2.6	3.3	3.1	2.8	3.3	2.5	1.3	1.1	1.0	0.9	0.5
0.8	1.1	0.8	1.2	2.3	2.9	2.6	2.7	3.0	3.3	3.3	2.1	1.1	0.9	1.1	0.7	0.5
0.6	0.9	1.0	0.7	1.2	2.5	2.8	2.9	3.0	2.7	2.3	1.3	1.1	1.2	0.9	0.7	0.4
0.6	1.0	0.8	0.8	0.8	1.1	2.2	2.5	2.3	1.8	1.2	1.1	1.2	1.1	0.8	0.5	0.2
0.4	0.6	0.9	0.9	0.8	0.7	1.0	1.1	1.2	1.1	1.0	1.2	1.1	1.0	0.6	0.4	0.2
0.2	0.4	0.6	1.0	0.8	1.0	0.7	0.7	0.7	0.9	1.2	0.9	0.9	0.5	0.4	0.2	0.3
0.4	0.3	0.4	0.6	0.9	1.1	1.1	0.9	0.9	0.9	0.7	0.6	0.6	0.4	0.4	0.3	0.2
0.3	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.2	0.3	0.2

Beispiel 3:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	9	11

EPS= 2.200000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1
0.2	0.2	0.2	0.4	0.6	0.7	0.7	0.6	0.7	0.7	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1
0.1	0.3	0.4	0.7	0.6	0.6	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.6	0.6	0.3	0.2	0.2	0.2
0.3	0.4	0.7	0.6	0.5	0.5	0.7	0.7	0.8	0.8	0.7	0.8	0.8	0.7	0.4	0.2	0.1
0.4	0.7	0.6	0.4	0.5	0.8	1.6	1.7	1.4	1.3	0.9	0.7	0.7	0.7	0.6	0.3	0.1
0.4	0.6	0.6	0.4	0.8	1.8	2.1	2.3	2.3	2.0	1.7	0.9	0.6	0.8	0.6	0.5	0.2
0.5	0.7	0.5	0.8	1.7	2.3	2.2	2.2	2.4	2.6	2.6	1.6	0.8	0.6	0.7	0.5	0.3
0.6	0.7	0.6	0.8	2.1	2.4	2.3	2.5	2.3	2.2	2.6	2.0	1.0	0.6	0.7	0.6	0.3
0.7	0.7	0.5	1.0	2.1	2.2	2.3	2.9	2.3	1.8	2.5	2.4	1.0	0.6	0.6	0.7	0.3
0.6	0.7	0.5	0.9	2.1	2.3	2.2	2.5	2.4	2.3	2.6	2.0	1.0	0.7	0.7	0.6	0.3
0.5	0.7	0.5	0.8	1.7	2.3	2.2	2.2	2.4	2.6	2.6	1.6	0.8	0.6	0.8	0.5	0.3
0.4	0.7	0.7	0.5	0.9	1.9	2.2	2.4	2.4	2.1	1.8	1.0	0.7	0.8	0.6	0.5	0.2
0.4	0.7	0.6	0.5	0.5	0.8	1.6	1.8	1.7	1.4	1.0	0.7	0.8	0.8	0.6	0.3	0.1
0.3	0.4	0.6	0.6	0.5	0.4	0.6	0.7	0.8	0.8	0.7	0.8	0.7	0.7	0.4	0.2	0.1
0.1	0.3	0.4	0.7	0.5	0.7	0.5	0.5	0.4	0.6	0.8	0.6	0.6	0.3	0.2	0.1	0.1
0.2	0.2	0.2	0.4	0.7	0.7	0.7	0.6	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1
0.1	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0.2	0.1

Beispiel 3:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	9	11

EPS= 2.40000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2
0.3	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2	
0.3	0.4	0.5	0.9	0.9	1.0	0.9	1.0	1.0	1.0	1.1	0.9	0.9	0.6	0.4	0.3	0.3	
0.4	0.6	0.9	0.9	0.9	0.9	1.1	1.2	1.3	1.2	1.1	1.1	1.1	1.0	0.6	0.4	0.3	
0.5	0.9	0.9	0.9	1.0	1.3	2.0	2.1	1.9	1.8	1.5	1.1	1.1	1.0	0.8	0.5	0.3	
0.6	0.9	1.0	0.9	1.3	2.1	2.6	2.7	2.8	2.5	2.2	1.4	1.1	1.0	0.9	0.7	0.4	
0.8	1.0	0.9	1.2	2.1	2.7	2.9	2.9	3.0	3.1	2.9	2.1	1.4	1.0	1.0	0.8	0.5	
0.8	1.0	1.0	1.3	2.4	2.9	2.9	3.1	3.0	2.9	3.1	2.4	1.6	1.0	1.0	0.8	0.5	
0.9	1.0	0.9	1.5	2.5	2.9	3.0	3.3	3.0	2.7	3.0	2.8	1.6	1.1	0.9	0.9	0.5	
0.8	1.0	1.0	1.4	2.5	2.9	2.9	3.1	3.1	3.0	3.1	2.4	1.6	1.1	1.0	0.9	0.5	
0.8	1.0	1.0	1.3	2.1	2.7	2.9	2.9	3.0	3.1	2.9	2.1	1.4	1.0	1.0	0.8	0.5	
0.6	0.9	1.0	1.0	1.4	2.2	2.7	2.8	2.9	2.6	2.3	1.5	1.1	1.1	0.9	0.7	0.4	
0.5	0.9	0.9	0.9	1.0	1.3	2.0	2.2	2.1	1.9	1.5	1.2	1.1	1.1	0.8	0.6	0.3	
0.4	0.6	0.9	0.9	0.9	0.9	1.1	1.2	1.3	1.2	1.1	1.1	1.0	0.9	0.6	0.4	0.3	
0.3	0.4	0.6	0.9	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	1.0	1.1	0.9	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3	
0.3	0.3	0.4	0.6	0.9	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.4	0.3	0.2	
0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.3	0.2	

Beispiel 3:

NT	NX	NY	NZ	IZ	M
20	17	17	17	9	11

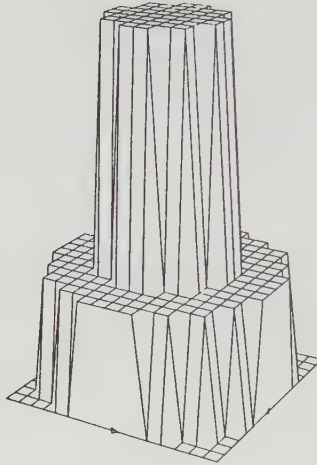
EPS= 2.60000000000000E-001

REKONSTRUKTION

0.4	0.5	0.6	0.6	0.7	0.9	1.1	1.1	1.1	1.0	1.0	0.8	0.7	0.6	0.5	0.5	0.4
0.5	0.6	0.7	1.0	1.3	1.4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6	0.5	0.4
0.6	0.7	0.9	1.4	1.5	1.6	1.7	1.7	1.7	1.7	1.8	1.6	1.4	1.1	0.8	0.6	0.5
0.7	1.0	1.4	1.6	1.6	1.8	2.0	2.1	2.2	2.1	2.0	1.8	1.7	1.5	1.1	0.8	0.6
0.9	1.3	1.5	1.7	1.9	2.2	2.9	3.1	3.0	2.9	2.5	2.0	1.8	1.6	1.3	1.0	0.6
1.0	1.4	1.6	1.8	2.3	3.1	3.6	3.8	3.9	3.6	3.2	2.5	1.9	1.7	1.5	1.1	0.7
1.2	1.6	1.8	2.2	3.1	3.8	4.1	4.3	4.3	4.2	3.9	3.1	2.3	1.8	1.7	1.3	0.9
1.3	1.6	1.8	2.3	3.4	4.0	4.3	4.4	4.4	4.3	4.2	3.5	2.6	1.9	1.6	1.4	0.9
1.4	1.7	1.8	2.5	3.4	4.1	4.4	4.6	4.4	4.3	4.3	3.8	2.6	1.9	1.6	1.4	1.0
1.3	1.6	1.8	2.3	3.4	4.0	4.3	4.4	4.4	4.3	4.2	3.5	2.7	1.9	1.6	1.4	0.9
1.2	1.6	1.8	2.2	3.1	3.8	4.2	4.3	4.3	4.2	4.0	3.1	2.4	1.8	1.7	1.3	0.9
1.1	1.5	1.7	1.8	2.4	3.2	3.7	3.9	4.0	3.7	3.3	2.6	2.0	1.8	1.5	1.2	0.8
0.9	1.4	1.5	1.7	1.9	2.3	2.9	3.2	3.1	3.0	2.6	2.0	1.9	1.7	1.4	1.0	0.7
0.7	1.0	1.4	1.6	1.6	1.8	2.0	2.1	2.2	2.1	2.0	1.8	1.7	1.5	1.1	0.8	0.6
0.6	0.7	0.9	1.4	1.5	1.6	1.7	1.7	1.7	1.7	1.8	1.6	1.4	1.1	0.8	0.6	0.5
0.5	0.6	0.7	1.0	1.3	1.4	1.6	1.5	1.5	1.5	1.4	1.2	1.1	0.8	0.7	0.6	0.5
0.5	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.1	1.2	1.2	1.1	1.1	0.9	0.8	0.7	0.5	0.5	0.4

NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=0.



NX=17 NY=17 NZ=17

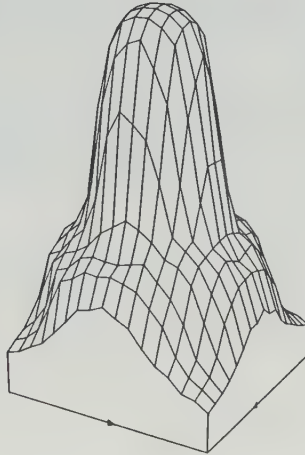
IZ=9 EPS=.2



Filter 2

NX=17 NY=17 NZ=17

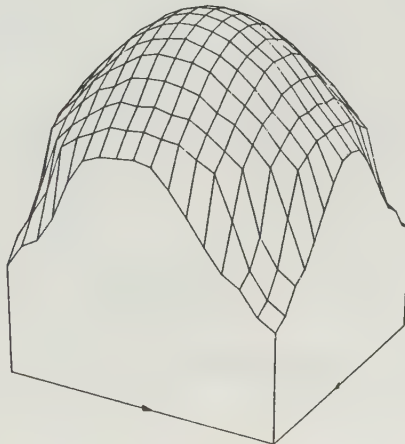
IZ=9 EPS=.22



Filter 3

NX=17 NY=17 NZ=17

IZ=9 EPS=.5



Gauß-Filter

Literaturverzeichnis

1. Adams, R. A. :
Sobolev spaces.
New York: Academic Press, 1975
2. Ahmed, N. ; Rao, K. R. :
Orthogonal transforms for digital signal processing.
Berlin: Springer, 1975
3. Alliney, S. ; Sgallari, F. :
An "ill-conditioned" Volterra integral equation related to the
reconstruction of images from projections.
SIAM J. Appl. Math. 44, 627-645 (1984)
4. Brigham, E. O. :
The fast Fourier transform.
Prentice Hall, 1974
5. Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A. :
Taschenbuch der Mathematik.
22. Auflage, Leipzig: Teubner, 1985
6. Byrne, C. L. ; Fitzgerald, R. M. :
Reconstruction from partial information with application in
tomography.
SIAM J. Appl. Math. 42, 933-940 (1982)
7. Butzer, P. L. ; Nessel, R. J. :
Fourier analysis and approximation (Vol.1).
Stuttgart: Birkhäuser, 1971
8. Davies, B. :
Integral transforms and their applications.
New York: Springer, 1978
9. Davison, M. E. :
The ill-conditioned nature of the limited angle tomography problem.
SIAM J. Appl. Math. 43, 428-448 (1983)
10. Deans, S. R. :
The Radon transform and some of its applications.
New York: Wiley, 1983

11. Fenyő, S. ; Stolle, H. W. :
Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen, Band 3.
Basel: Birkhäuser, 1984
12. Finch, D. V. :
Cone beam reconstruction with sources on a curve.
SIAM J. Appl. Math. 4, 665-673 (1985)
13. Finch, D. V. ; Solmon, D. C. :
A characterisation of the range of the divergent beam X-ray transform.
SIAM J. Math. Anal. 14, 767-771 (1983)
14. Gradshteyn, I. S. ; Ryzhik, I. M. :
Table of integrals, series and products.
New York: Academic Press, 1980
15. Groetsch, C. W. :
The theory of Tikhonov regularisation for Fredholm equations of the first kind.
Boston: Pitman, 1984
16. Hamaker, C. ; Smith, K. T. ; Solmon, D. C. ; Wagner, S. L. :
The divergent beam X-ray transform.
Rocky Mountain J. of Math. 10, 253-283 (1980)
17. Helgason, S. :
The Radon transform.
Progress in Mathematics 5, Boston: Birkhäuser, 1980
18. Herman, G. T. :
Image reconstruction from projections.
The fundamentals of computerized tomography.
New York: Academic Press, 1980
19. Herman, G. T. ; Naparstek, A.:
Fast image reconstruction based on a Radon inversion formula appropriate for rapidly collected data.
SIAM J. Appl. Math. 33, 511-533 (1977)
20. Herman, G. T. ; Natterer, F. (eds.):
Mathematical aspects of computerized tomography.
Proceedings Oberwolfach 1980,
Berlin: Springer, 1981

21. Jelinek, J. ; Segeth, K. ; Overton, T.R. :
Three-dimensional reconstruction from projections.
Aplikace Matematiky 30, 92-109 (1985)
22. Leahy, J. V. ; Smith, K. T. ; Solmon, D. C. :
Uniqueness, nonuniqueness and inversion in the x-ray and Radon problems.
Internat. Symp. on ill-posed problems, Univ. of Delaware,
Newark, DE. (1979)
23. Lions, J. L. ; Magenes, E. :
Non-homogeneous boundary value problems and applications, Vol.1
Berlin: Springer, 1972
24. Louis, A. K. :
Picture reconstruction from projections in restricted range.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 2, 209-220 (1980)
25. Louis, A. K. :
Analytische Methoden in der Computer Tomographie
Habilitationsschrift, Münster , 1981
26. Louis, A. K. :
Tikhonov-Phillips regularisation of the Radon transform.
in: Hämmerlin G.; Hoffmann, K.-H. (eds)
Constructive methods for the practical treatment of integral
equations.
Basel: Birkhäuser, 1985 (ISNM 73)
27. Louis, A. K. ; Natterer, F.:
Mathematical problems of computerized tomography.
Proceedings of the IEEE 71, 379-389 (1983)
28. Ludwig, D. :
The Radon transform on Euclidian space.
Comm. Pure Appl. Math. 69, 49-81 (1966)
29. Natterer, F. :
A Sobolev space analysis of picture reconstruction.
SIAM J. Appl. Math. 39 , 402-411 (1980)
30. Natterer, F. :
Efficient implementation of 'optimal' algorithms in computerized
tomography.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 2, 545-555 (1980)

31. Natterer, F. :
Exploiting the ranges of Radon transforms in tomography.
in: Deufilhard, P. ; Hairer E. (eds)
Numerical treatment of inverse problems in differential and integral
equations. (Proceedings Heidelberg 1982)
Birkhäuser, 1983
32. Natterer, F. :
On the order of regularisation methods.
in: Hämmerlin, G. ; Hoffmann, K.-H. (eds)
Improperly posed problems and their numerical treatment.
Birkhäuser 1983
33. Natterer, F. :
Numerik des Radonschen Problems.
Jahresbericht d. Dt. Math.-Verein. 87, 108-126 (1985)
34. Natterer, F. :
The mathematics of computerized tomography.
Stuttgart: Teubner, Chichester: Wiley, 1986
35. Niederdrenk, K. :
Die endliche Fourier- und Walsh-Transformation mit einer Einführung
in die Bildverarbeitung.
Braunschweig: Vieweg , 1982
36. Nievergelt, Y. :
Elementary inversions of Radon's transform.
SIAM Review 28, 79-84 (1986)
37. Nievergelt, Y. :
Exact reconstruction filters to invert Radon transforms with
finite elements.
Journal of Math. Anal. and Appl. 120, 288-314 (1986)
38. Radon, J. :
Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs
gewisser Mannigfaltigkeiten.
Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 69
262-267 (1917) (nachgedruckt in Helgason [17])

39. Ramachandran, N. ; Lakshminarayanan, A. V. ;
Three dimensional reconstruction from radiographs and electron
micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 68:0 , 2236-2240 (1971)
40. Royden, H.L. :
Real Analysis.
New York: Macmillan Company, 1963
41. Rudin, W.:
Real and complex analysis.
New Delhi: Tata McGraw Hill , 1974
42. Shepp, L. A. ; Kruskal, J.B. :
Computerized tomography: the new medical x-ray technology.
Amer. Math. Monthly 85, 420-439 (1978)
43. Shepp, L. A. ; Logan, B. F. :
The Fourier reconstruction of a head section.
IEEE Trans. on Nuclear Science, NS-21, 21-43, June 1974
44. Smith, K. T. :
Reconstruction formulas in computerized tomography.
Proc. of Symposia in Applied Math. 27, 7-23 (1982)
45. Smith, K. T. :
Inversion of the x-ray transform.
SIAM-AMS Proceedings 14, 41-52 (1984)
46. Smith, K. T. ; Keinert, F. :
Mathematical foundations of computed tomography.
Applied Optics 24, 3950-3957 (1985)
47. Smith, K. T. ; Solmon, D. C. :
Lower dimensional integrability of L^2 - functions.
Journal of Math. Anal. and Appl. 51, 539-549 (1975)
48. Smith, K. T. ; Solmon, D. C. ; Wagner, S. L. :
Practical and mathematical aspects of reconstructing objects from
radiographs.
Bull. Amer. Math. Soc. 83(6), 1227-1270 (1977)
49. Smith, K. T. ; Wagner, S. L. ; Bottema, M.J. :
Sharpening radiographs.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 81, 5237-5241 (1984)

50. Solmon, D. C. :
The x-ray transform.
Journal of Math. Anal. and Appl. 56, 61-83 (1976)
51. Stein, E. M. :
Singular integrals and differentiability properties of functions.
Princeton, N.J. : Univ. Press , 1970
52. Stein, E. M. ; Weiss, G. :
Introduction to Fourier analysis on Euclidian spaces.
Princeton, N.J. : Univ. Press , 1971
53. Strichartz, R. S. :
Radon inversions - variations on a theme.
Amer. Math. Monthly 89, 377-384, 1982
53. Triebel, H. :
Interpolation theory, function spaces, differential operators.
Amsterdam: North Holland, 1978
54. Tuy, H. :
Reconstruction of a three-dimensional object from a limited range
of views.
Journal of Math. Anal. and Appl. 80, 598-616 (1981)
55. Tuy, H. K. :
An inversion formula for cone-beam reconstruction.
SIAM J. Appl. Math. 43, 546-552 (1983)
56. Weidmann, J.:
Lineare Operatoren in Hilberträumen.
Stuttgart: Teubner, 1976
58. Wloka, J. :
Partielle Differentialgleichungen.
Stuttgart: Teubner, 1982

Lebenslauf

Dietwald Schuster	geboren am 27. Dezember 1956 in Saderlach im Banat (Rumänien); Eltern: Dipl.-Ing. Otto-Fritz Schuster und Rosemarie Schuster; Familienstand: verheiratet seit 3. April 1985 mit Christine Schuster geb. Nußberger; Kinder: Sophie, geboren am 16. Juli 1986
Schulbildung	1963-1975 Volksschule, Mittel- und Oberstufe am Deutschen Lyzeum in Neu-Arad (Rumänien); 1975 Abitur Dezember 1976 Übersiedlung in die Bundesrepublik Deutschland; 1977-1978 Sonderlehrgang am Studienkolleg Frankfurt/Main; Anerkennungsprüfung für die allgemeine Hochschulreife
Studium	1978-1983 Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Ludwig-Maximilians-Universität München; September 1983 Diplom-Hauptprüfung
Tätigkeit	1975-76 Aushilfslehrer an der deutschen Schule in Schag (Rumänien); seit 1984 wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München

